Évaluation des programmes d'infrastructure : ordre optimal de réalisation sous contrainte financière

William Roy

Évaluation des programmes d'infrastructure : Ordre optimal de réalisation sous contrainte financière

William ROY[1]
Laboratoire d'Économie des Transports (LET)
Université Lumière Lyon 2

Version août 2005
Disponible sur : http://halshs.ccsd.cnrs.fr/halshs-00003971

Résumé :
L'État n'est pas en mesure de financer sans délais l'ensemble des projets d'infrastructure de transport socio-économiquement rentables. La sélection opérée par les analyses coûts-avantages n'est pas suffisante, un arbitrage supplémentaire est nécessaire pour définir les projets qui seront prioritairement réalisés. C'est ce choix, structurant les programmes d'infrastructure, auquel nous souhaitons associer des recommandations normatives. Nous proposons un modèle analytique permettant de démontrer que le critère pertinent pour hiérarchiser les projets est le ratio entre utilité collective et montant de subvention. La modélisation conduit à penser qu'il est préférable de privilégier les projets créant le plus de valeur sociale par euro public investi. L'étude détaillée des hypothèses les plus restrictives du modèle de base conduisant à ce résultat permet d'affiner le domaine de validité du critère. En outre, ce ratio est tout à fait cohérent avec l'évolution partenariale des financements de projets d'infrastructure.

Mots clés : Infrastructure, contrainte financière, calcul économique, évaluation, choix public.

Classification JEL : D61 ; D7 ; H43 ; H54 ; G31 ; L9 ; R42

[1] william.roy@let.ish-lyon.cnrs.fr
William ROY / LET-ISH / 14 avenue Berthelot / 69363 LYON Cedex 07 / FRANCE
Tel : +33 (0)4 72 72 64 44 / Fax : +33 (0)4 72 72 64 48

1. Introduction

La contrainte financière est tangible pour nombre de gouvernement, ne serait-ce qu'en raison d'engagements institutionnels : accord avec le FMI pour les pays en développement, pacte de stabilité et de croissance européen… Plus fondamentalement, la hausse des prélèvements obligatoires est peu soutenable économiquement lorsqu'elle a des effets désincitatifs sur les agents privés (réduction de leur activité ou délocalisation). L'augmentation des impôts est par ailleurs une stratégie risquée électoralement, et de plus en plus rare. Concernant l'endettement, notons qu'il est généralement dommageable pour l'économie d'un pays d'évincer l'investissement privé en captant une partie disproportionnée de l'épargne nationale[2]. Au total, dans la plupart des économies de marché, les pouvoirs publics sont dans l'impossibilité d'augmenter significativement le niveau des ressources publiques mobilisables.

Contraint financièrement, les États et collectivités locales peinent à satisfaire toutes les demandes recevables d'investissement. De surcroît, il est peu probable que l'acuité du problème faiblisse. En effet, les difficultés budgétaires des collectivités sont aussi la contrepartie financière de la loi de Wagner[3]. Le décalage entre moyens publics et besoins publics est de plus en plus flagrant car la part des besoins collectifs tend à augmenter. Les équipements porteurs de bien-être social nécessitent de plus en plus de subventions, alors que les finances publiques sont relativement stables.

Cette situation conduit les élus et leurs administrations à différer la réalisation de certains investissements qu'il est pourtant collectivement souhaitable de réaliser sans délais. Une file d'attente, plus ou moins explicite selon les pays[4], rassemble ces projets « socialement rentables ». Au sein du ministère français des transports par exemple, la rareté des fonds publics d'investissement est une réalité. En l'occurrence, l'État français n'est actuellement pas en mesure de réunir les ressources qui seraient nécessaires pour financer l'ensemble des projets « terminant » le maillage du réseau autoroutier national.

La marge de manœuvre qui apparaît alors entre les mains des décideurs publics est la hiérarchisation des priorités. Intuitivement, on peut penser qu'un ordre astucieux de réalisation pourra permettre de satisfaire au mieux les besoins collectifs. La question de l'ordre optimal de réalisation des projets d'infrastructure se pose donc assez naturellement. Nous verrons que la contrainte de financement joue un rôle sur l'ordonnancement optimal des projets. Nous montrerons aussi que la contrainte de financement peut être associé à un critère relativement simple d'aide à la décision permettant d'arbitrer entre les priorités. Cet article est appliqué au cas des investissements en infrastructures de transport, secteur dans lequel la mesure de l'utilité collective est historiquement ancienne. Les résultats sont avant tout théoriques et pourraient être appliqués à de nombreuses décisions d'investissement dans le domaine public, voire privé.

Au plan théorique, l'introduction d'une contrainte financière dans les modèles de choix collectif n'a pas été une optique explorée significativement. Les économistes spécialisés dans l'évaluation des choix publics n'ont pas développé cette problématique, lui préférant souvent

[2] Ce type de mesure peut avoir des conséquences sur les taux d'intérêt, sur le taux de change et/ou sur le compte financier de la balance des paiements.

[3] Economiste allemand du début du XX^{e} siècle qui a stigmatisé et prédit l'accroissement du poids économique de l'État avec la croissance économique (à très long terme)

[4] Il s'agit généralement d'une liste regroupant les principaux projets « sur la table », rédigée par chaque ministère générateur d'infrastructures.

le calcul économique[5] et ses applications. La différence méthodologique fondamentale qui rend spécifique notre approche par rapport à celle du calcul économique concerne l'échelle de l'analyse. Il ne s'agira pas d'évaluer un projet particulier, mais un programme de projets entier. L'optique est donc plus macro-économique que celle du calcul économique. Toutefois la formalisation du problème est relativement standard, au sens des programmes micro-économiques d'optimisation.

L'un des premiers modèles traitant du choix d'investissement en présence de rationnement du capital est celui de Lorie & Savage (1955), qui a été reformulé sous forme de programmation linéaire par Weingartner (1963). Le modèle de Baumol & Quandt (1965) peut aussi être considéré comme fondateur dans la mesure où c'est le premier modèle à élargir le champ de la hiérarchisation des investissements aux modalités de financement pouvant être mobilisées. Cela dit, Myers (1972) a montré que le modèle de Baumol et Quandt est formellement le même que celui de Lorie & Savage, ce qui permet de simplifier le problème à la manière de l'hypothèse de Modigliani & Miller (1961) faite en analyse financière. Bertonëche & Langohr (1977) offrent une intéressante mise en perspective de ces travaux fondateurs.

Les recherches sur ce thème se sont très majoritairement orientées vers l'amélioration des modèles de programmation linéaire[6]. Or si cette méthode fournit un mode de résolution ponctuel efficace, elle ne permet pas de faire apparaître un résultat général. En particulier, aucun auteur n'a pu établir de règle systématique en terme de hiérarchisation des projets. Par ailleurs, ces modèles concernent exclusivement le choix d'investissement dans le contexte de l'entreprise. On observe, à la lecture des publications des années 1960-1970, que c'est le rationnement du crédit imposé aux entreprises à cette époque qui pose question. Mais force est de constater qu'elles bénéficient aujourd'hui d'un accès ouvert aux divers modes de financement. Ceci explique sans doute le désintéressement progressif concernant la problématique du choix d'investissement en situation de rationnement du financement. De nos jours, ce sont les collectivités publiques qui subissent une rareté des fonds mobilisables. Nous voyons un intérêt certain à extraire des modèles appliqués aux entreprises dans les années 1960-1970 les outils d'une application au cas des collectivités.

Ces dernières années, les recherches se sont notamment orientées vers l'optimisation de la mise en œuvre des projets : vers les perspectives qu'offrent les partenariats public-privé. Il existe des marges de manœuvre prometteuses, s'appuyant sur l'utilisation de « montages » organisationnels et financiers adaptés à chaque situation[7]. Comme le démontre Bonnafous (2002), le recours aux PPP est paradoxalement plus profitable pour la collectivité lorsque la rentabilité financière des projets diminue. C'est d'ailleurs ce que l'on observe historiquement, puisque tous les projets autoroutiers qui pouvaient s'autofinancer (avec des péages) n'ont pas donné lieu à des PPP. Par contre, alors que presque tous les projets actuellement étudiés nécessitent un apport des contribuables, les réalisations s'ouvrent largement aux PPP. Ces travaux ont un double intérêt. En premier lieu, ils montrent que les PPP permettent de desserrer pour partie la contrainte financière. Mais surtout, ils mettent l'accent sur l'arbitrage usager-contribuable, question clé du financement en situation de rareté budgétaire[8]. Bonnafous & Jensen (2005) montrent que cette rareté conduit à accroître l'importance de l'aspect financier sur les bénéfices socio-économiques (non monétaires) des projets. Tout se passe comme si les contraintes d'endettement et de budget augmentaient le poids relatif de la rentabilité financière par rapport à celui des bénéfices socio-économique dans la décision finale d'investir. La faisabilité financière d'un projet a une importance croissante avec le

[5] Nous verrons que le calcul économique apporte un contribution vitale pour le ratio proposé.
[6] Pour une synthèse, voir Babusiaux (1990)
[7] Pour une approche très concrète, voir par exemple Garrido (1995)
[8] La tarification des infrastructures est sous-jacente, mais ne sera pas traitée, en considérant les prix et les recettes comme une donnée

resserrement de la contrainte budgétaire. C'est l'idée sous-jacente de coût d'opportunité des fonds publics, pondérant d'autant plus l'argent public qu'il est rare, que nous mettrons à profit pour extraire des indications sur l'ordre optimal de réalisation.

La problématique que nous allons explorer rejoint d'une part les travaux sur la programmation linéaire (choix d'investissement sous contrainte) et d'autre part les recherche sur l'apport des PPP. Les résultats forgés par le calcul économique sont un fondement indispensable. Nous recherchons un critère de hiérarchisation lorsqu'un grand nombre de projets sont socialement rentables mais que les besoins de subvention rendent la réalisation immédiate de tous ces projets financièrement impossible. Nous souhaitons définir les caractéristiques des investissements à privilégier du point de vue de la collectivité, en termes d'arbitrage entre rentabilité financière et rentabilité socio-économique. En première approximation, on pourrait penser qu'il est préférable de favoriser le financement des projets ayant la valeur socio-économique la plus forte. Nous verrons que cette proposition n'est généralement pas vérifiée lorsqu'il existe une contrainte financière. Si la collectivité investit dans le projet apportant le plus de valeur sociale mais qui absorbe aussi toutes les ressources, elle se prive de tous les « petits » projets (en termes de besoin de subvention) dont l'accumulation pouvait être plus profitable socialement. Nous montrerons que le critère pertinent pour classer les projets est le ratio rassemblant la l'utilité sociale créée et le besoin de subvention, « la VAN par euro public investi ». Un projet doit être d'autant plus prioritaire que ce ratio est grand.

C'est sans doute l'indivisibilité des projets (problème de choix discret) qui a poussé la plupart des auteurs à se tourner vers la programmation mathématique depuis les années 1960. Or cette méthodologie ne permet pas d'aboutir à une démonstration en faveur du critère de la valeur sociale par euro public investi. On retrouve parallèlement, dans divers manuels de gestion financière[9], l'intuition empirique de ce critère. Il n'est en effet pas vraiment contre-intuitif pour l'économiste. Si ce critère a parfois été proposé, il n'existe pas à notre connaissance de démonstration analytique publiée. Nous souhaitons contribuer à son ancrage définitif dans les processus de décision, à la suite de Maurice (2004) et Bonnafous & Jensen (2005). Nous proposons dans ce qui suit un modèle analytique qui, espérons-le, pourra convaincre les plus sceptiques[10] de l'utilité d'une hiérarchisation des projets selon leur valeur par euro de subvention.

La démonstration de l'intérêt de ce critère est l'objet de la modélisation de la partie 2. Ce modèle de base a l'avantage d'être simple, mais il est aussi discutable car un certain nombre d'hypothèses doivent être faites. Une étude plus poussée de certaines hypothèses permettra de préciser le domaine de validité du critère. En particulier, dans la partie 3 nous avons recherché une meilleure intégration de la dimension temporelle. Enfin, dans la partie 4, nous conclurons et apporterons quelques éléments de réflexion sur la portée de ce résultat.

[9] par exemple Langlois & Mollet (1999)

[10] Le ministère français des transport vient d'être convaincu puisqu'il a publié une lettre le 27 mai 2005 portant mise à jour de l'instruction-cadre du 25 mars 2004 définissant les modalités d'évaluation des grands projets d'infrastructure de transport. §4 annexe III, p.7, on lit : « afin de tirer le meilleur parti d'un financement public limité, la règle de classement des projets doit être non pas le bénéfice actualisé induit par le projet, mais le bénéfice actualisé par euro public dépensé ». Notez que le « bénéfice actualisé » est définit par le CGP (2005, p.23) comme « la différence entre les bénéfices et les coûts de toutes natures, eux mêmes actualisés, induits par l'opération », c'est à dire la VAN socio-économique.

2. Modèle de base

Dans la section 2.1, nous reviendrons sur les principales caractéristiques des Analyses Coûts-Avantages qui servent à mesurer l'utilité sociale des infrastructures de transport, ainsi que sur l'utilisation de cet outil pour évaluer les programmes au complet. Nous montrerons ensuite (2.2) la pertinence du ratio entre l'utilité sociale d'un projet et son besoin de subvention. En particulier, nous mettrons en évidence que c'est le coût d'opportunité des fonds publics qui fonde l'existence d'un ordre optimal de réalisation selon le critère de la VAN par euro public investi. Nous terminerons (2.3) par l'estimation de quelques ordres de grandeur concernant le coût d'opportunité des fonds publics français dans le domaine des infrastructure de transport.

2.1. Hypothèses sur l'utilité sociale des programmes

Pour évaluer les programmes d'infrastructure, il faut bien sûr être en mesure d'évaluer la valeur sociale de chaque projet, c'est le rôle des Analyses Coûts-Avantages. Mais l'optique de l'évaluation d'un programme complet conduit à atteindre certaines limites de cet outil qui seront commentées.

2.1.1 Les fondamentaux de l'Analyse Coûts-Avantages

L'évaluation des grands projets d'infrastructure de transport est systématique dans les pays développés (Transport Policy 2000) et se généralise dans les pays en développement. En France, la loi[11] prévoit que « les choix relatifs aux infrastructures, équipements et matériels de transport et donnant lieu à financement public, en totalité ou partiellement, sont fondés sur l'efficacité économique et sociale de l'opération. » Ces évaluations, dont la base théorique est le calcul économique (Lesourne 1972, Bloy & al. 1976), conduisent à une Analyse Coûts-Avantages (ACA). En output, un « bilan socio-économique » réunit les nombreux bénéfices et les multiples préjudices et coûts de chaque projet. Cette évaluation a le remarquable avantage d'éclairer le décideur public sur le résultat que peut escompter la collectivité, en investissant dans telle ou telle infrastructure.

On distingue traditionnellement le « bilan financier » du « bilan socio-économique ». Le bilan financier ne compare que les recettes encaissables (péages) et les dépenses décaissables (d'investissement et d'exploitation) associées à un projet d'infrastructure. A l'image de l'évaluation de projet telle qu'elle est pratiquée par les entreprises, les flux retenus sont exclusivement des flux de trésorerie. Ce n'est pas un bilan « public » mais un bilan « privé », au sens où il ne prend pas en compte les intérêts de toutes les parties prenantes (automobilistes, usagers des transports en commun, riverains…) mais seulement ceux de l'opérateur qui sera en charge de l'exploitation.

En ce qui concerne le bilan socio-économique, va vocation est beaucoup plus universelle puisqu'il cherche à évaluer l'intérêt d'un projet pour la collectivité[12]. En plus du bilan financier, cette analyse inclut les gains de temps, les gains de sécurité, les pollutions de l'air

[11] Loi d'Orientation des Transports Intérieurs (LOTI) n°82-1153 du 30 décembre 1982, Titre I - Chapitre III « Des infrastructures, équipements, matériels et technologies », article 14 (modifié par la loi du 25 juin 1999).
[12] Dans un sens le plus large possible, y compris pour les générations futures.

ou encore les nuisances sonores (Baumstark 2001). Les coûts économiques et sociaux des grands projets d'infrastructure y sont évalués sur la base de critères homogènes (CGP 2001, dit « Boiteux II »), en prenant en compte les principaux effets externes[13] (environnement et sécurité). On y inclura sans doute bientôt les effets sur la santé, l'emploi, les paysages ou l'aménagement du territoire. Toutefois, la limite principale à l'intégration de nouveaux effets est la nécessité qu'ils soient monétarisables.

L'hypothèse la plus critique est sans doute celle concernant le taux d'actualisation ajustant les flux futurs, tant son impact peut être déterminant. Il est notamment possible avec un taux relativement élevé « d'écraser » les dommages environnementaux survenant à un horizon « suffisamment » éloigné. Le taux d'actualisation peut aussi être l'outil d'une intégration des risques, en particulier ceux de l'estimation du trafic et donc des recettes. C'est cette double préoccupation du risque et du développement durable qui a conduit le Commissariat Général au Plan (CGP 2005) à réviser son taux d'actualisation. Notons que l'effet « boite noire » du taux d'actualisation tend à être de plus en plus limité[14].

On définit classiquement la valeur socio-économique d'un projet par la formulation suivante, actualisant les flux futurs et capitalisant les dépenses d'investissement :

$$VAN = \sum_{t=-d}^{-1} \frac{-\Delta I_t}{(1+a)^t} + \sum_{t=0}^{n} \frac{\Delta EBE_t + \Delta A_t}{(1+a)^t}$$

Il s'agit de la Valeur Actualisée Nette à la date de mise en service du projet. Cette VAN prend en compte l'investissement ΔI, l'excédent brut d'exploitation ΔEBE et les avantages monétarisés[15] ΔA, actualisés à un taux a. La figure 1 représente de manière stylisée ce à quoi peuvent ressembler les flux. Bien entendu, toute évaluation est différentielle : on compare l'effet de l'investissement par rapport à une situation de référence. Or cette situation de référence n'est pas aussi triviale qu'il y paraît. Ce n'est pas la situation actuelle, ni celle de la mise en service, mais la situation prévue en l'absence de mise en œuvre du projet. L'idée d'une évaluation différentielle correspond à une perception des avantages et des coûts par rapport à un scénario *do nothing*. En particulier, il existe souvent des investissements dits « éludés », qui ne seront plus nécessaires du fait de la réalisation du projet, et qui viennent réduire le coût réel du projet pour la collectivité.

In fine, les pouvoirs publics disposent d'un outil cohérent, forgé sur la base de concepts théoriques robustes. L'application du calcul économique à l'évaluation socio-économique des projets de transport permet une approximation de l'utilité sociale d'un projet satisfaisante[16] L'attribution d'une Valeur Actualisée Nette Socio-Economique est réalisable en pratique[17], au prix de quelques hypothèses méthodologiques. Et théoriquement, si la VAN d'un projet est positive, alors le projet doit être réalisé.

---

[13] Pour une comparaison des méthode d'évaluation des nuisances, voir par exemple Nicolas (1998)

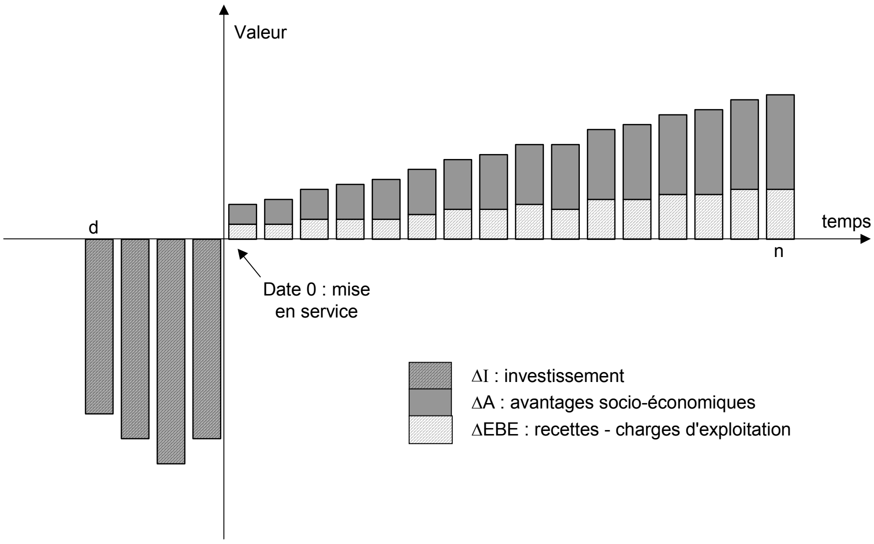
[14] D'un taux de 8% agrégeant un ensemble d'éléments mal défini, nous passons à un taux de 4% « nu ». Les risques devront être clairement explicités et pris en compte par ailleurs pour chaque projet. Ce taux pourra décroître jusqu'à 2% à partir de 30 ans.

[15] En pratique ce sont surtout des gains de temps, la résultante des effets monétarisés est généralement positive.

[16] Dès lors que l'on inclut aussi des pondérations prenant en compte les effets redistributifs.

[17] Le ministère des transports a produit des recommandations méthodologiques à destination des personnels qui établissent ces valeurs : http://www.route.equipement.gouv.fr/RoutesEnFrance/circulaire/ree/sommaire.htm. On trouvera un autre exemple dans CERTU (2002).

Figure 1 : Représentation des flux monétaires et monétarisés d'un projet de transport



La règle de la VAN positive est individuelle, valable pour chaque projet. La question des programmes d'infrastructure et de leur évaluation n'est pas immédiate. Elle n'émerge que lorsque le décideur se trouve face à un ensemble de projets socialement rentables (VAN positive) et un budget insuffisant. La contrainte financière rend alors nécessaire le classement de ces réalisations acceptables.

2.1.2 La question de la complémentarité et de la substituabilité des projets

Rares sont en pratique les projets parfaitement isolés de toute autre décision d'investissement. Les projets peuvent ne pas être indépendants les uns des autres et avoir des effets significatifs sur la VAN des autres. Par exemple, la réalisation d'un projet sur un axe donné peut modifier le trafic attendu sur des axes géographiquement proches. La construction d'une nouvelle autoroute peut affecter le trafic des autoroutes existantes ou le trafic potentiel des autoroutes en projet, en faisant notamment varier le nombre des véhicules qui vont y circuler. L'effet d'une nouvelle mise en service se caractérise par un double mécanisme de ré-allocation du trafic entre les voies et de trafic induit (effet réseau). Ces variations affectent a priori plutôt les recettes et les avantages monétarisés et peu les coûts d'investissement.

Cela dit, l'impact d'un projet sur la rentabilité sociale des investissements déjà réalisés est inclus parmi les éléments constitutifs de la VAN. Tout au moins, la VAN est théoriquement le lieu de la comptabilisation de ce genre de conséquences. La question se pose donc exclusivement pour les projets non réalisés, sachant que l'ACA n'anticipe pas l'impact d'une réalisation sur les projets qui ne sont pas réalisés et dont l'ordre de réalisation est inconnu.

Les effets des investissements les uns sur les autres sont des externalités, au sens où il ne sont pas médiatisés par un système de prix. Les externalités produites sont multilatérales puisqu'un projet nouveau va affecter la rentabilité (VAN) de plusieurs autres. Ces externalités sont non rivales (*undepletable*) car le dommage ou le bénéfice subi par un projet ne diminue pas l'externalité affectant les autres (hors congestion). Par exemple, si une nouvelle infrastructure diminue le trafic sur un axe parallèle, rien ne permet d'affirmer que le trafic sur un troisième axe parallèle sera moins affecté.

L'hypothèse que nous allons faire dans les modèles qui suivent est que les effets externes entre les projets sont toujours marginaux, que les études partielles (ACA) fournissent une assez bonne approximation de leur valeur sociale. Nous ne considérerons pas que la VAN socio-économique et le besoin de subvention sont modifiés par l'ordre de réalisation. Or les externalités entre projets peuvent théoriquement avoir un impact sur l'ordre optimal. Dans le cas où les paramètres des projets sont endogènes (varient en fonction de l'ordre), le critère que nous allons mettre en évidence pourrait ne plus être robuste.

Si la date de mise en service de certains projets est décalée, les premiers ne subissent les externalités des derniers qu'après un certain délai. Ce délai est une variable clé concernant l'impact de la complémentarité ou de la substituabilité des projets sur l'ordre optimal de réalisation.

Considérons, pour simplifier, qu'à terme tous les projets seront réalisés. Le problème se réduit donc au délai qui sépare chaque projet réalisé de ceux qui sont différés par rapport à lui. Durant cette période, l'externalité des projets différés n'est pas perçue par les projets réalisés. Intuitivement, le délai qui sépare des projets sera d'autant plus préjudiciable que les projets sont complémentaires (majorité d'externalités positives) et d'autant plus bénéfique que les projets sont substituables (majorité d'externalités négatives). Donc, plus des projets sont substituables et plus le délai qui les sépare doit être long. Réciproquement, plus des projets sont complémentaires et plus le délai les séparant doit être court.

En fait, ce problème est généralement traité lors de la constitution des projets eux-même. Il relève du bon sens dans la majorité des cas. Par exemple, les projets fortement complémentaires sont tout simplement réunis au sens du même projet. De même, l'étude des substituabilités les plus fortes se fait en amont, notamment lors du choix du tracé définitif de la voie de circulation parmi les différentes alternatives (par définition fortement substituables). C'est à l'étape de l'élaboration des projets qu'intervient majoritairement la question de la complémentarité et de la substituabilité. Nous ferons l'hypothèse que les projets en lice n'ont pas une valeur sociale fondamentalement différente selon l'ordre de réalisation adopté. En pratique, il conviendra de porter une attention particulière sur ce point puisqu'il n'est pas traité par le modèle.

Dans ce qui suit, la variable VAN correspond à une valeur qui intègre les décisions relatives au taux d'actualisation et à la valorisation des effets externes. Cette variable est l'utilité sociale du projet telle qu'elle est mesurée en pratique. Sa valeur est supposée exacte pour chaque projet ou tout au moins ne pas s'écarter trop significativement de leur véritable utilité. Aucun biais lié à l'éventuelle complémentarité ou substituabilité des projets ne sera pris en compte.

2.2. Démonstration du critère de la VAN par euro public investi

Nous supposerons dans ce qui suit que le décideur a le choix entre *n* projets ; chaque projet *i*, avec i=1,…,n , est caractérisé par un couple de paramètres :

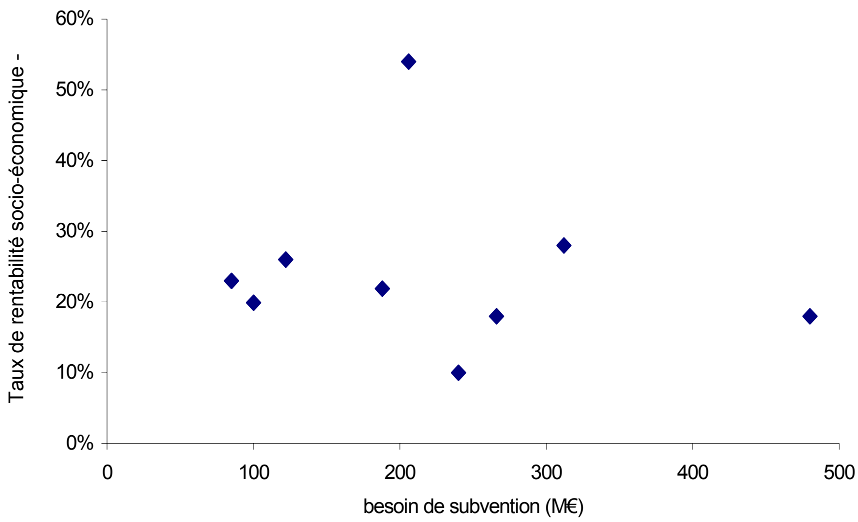
- VAN_i : La valeur actualisée nette du projet *i* ; avec $VAN_i > 0$, $\forall$ i=1,…,n.
- S_i : Le besoin de subvention du projet *i* ; avec $S_i > 0$, $\forall$ i=1,…,n.

Le besoin de subvention est un montant qui représente tout ou partie des frais d'investissements (voire d'exploitation), selon la rentabilité financière du projet concerné. Il s'agit par exemple du montant nécessaire pour que l'État puisse amener une entreprise à s'engager dans un contrat BOT (*Built Operate and Transfert*) sur un segment d'autoroute. Si l'entreprise estime pouvoir financer 60% de son investissement par les péages collectés pendant la durée du contrat de concession, le besoin de subvention est de 40% du coût d'investissement.

Comme nous l'avons précisé en introduction, la recherche d'une utilité collective maximale pour un programme d'infrastructures peut être modélisée comme un problème combinatoire. La résolution se fait par programmation linéaire en variables bivalentes. Il s'agit d'un problème classique de programmation combinatoire, appelé *knapsack problem*, pour la résolution duquel il existe de nombreux algorithmes (souvent à base de procédures arborescentes d'optimisation). Nous ne chercherons pas à résoudre le problème d'optimisation par des algorithmes mais analytiquement, dans le but de donner plus de généralité et de sens au résultat.

Dans la résolution analytique, l'une des hypothèse critique est celle de la relation fonctionnelle entre les paramètres VAN et S des projets. Maurice (2004) n'a pas rejeté cette hypothèse de modélisation. Dans ce cas, il convient d'associer un ensemble d'autres hypothèses à la relation fonctionnelle (dérivabilité, continuité et convexité). Or, il n'existe pas, en toute généralité, de relation fonctionnelle triviale entre ces deux variables. Il paraît en effet difficile de supposer que deux projets, avec des besoins de subvention identiques, vont systématiquement induire les mêmes bénéfices, étant donné la variété des situations possibles. La figure 2 rassemble les quelques données récentes disponibles[18] en guise de contre-exemple. A partir de ces quelques points, aucune relation évidente ne semble apparaître pour justifier empiriquement une relation fonctionnelle. Cette hypothèse limite la portée des résultats. L'une des contribution de ce travail réside dans le choix d'une modélisation grâce à laquelle il n'est pas nécessaire de postuler une relation fonctionnelle entre les variables.

Figure 2 : L'hypothèse d'une relation fonctionnelle entre la rentabilité socio-économique et le besoin de subvention est peu opérante.



Source : Données concernant les projets d'autoroutes à péages français susceptibles d'être concédés sur la période 2003–2008, d'après le tableau de synthèse de l'annexe II-R-AC du *Rapport d'audit sur les grands projets d'infrastructures de transport* établi par l'Inspection Générale des Finances & Conseil Général des Ponts et Chaussées en février 2003.

[18] L'axe des ordonnées ne reprend par les valeurs des VAN (qui ne sont pas publiées). Il s'agit des taux de rentabilité socio-économique (TRE), c'est à dire des taux d'actualisation qui annulent la VAN socio-économique de chaque projet. Ces deux variables varient par définition dans le même sens pour des valeurs positives.

2.2.1 *Modélisation*

Nous supposerons que la fonction objectif de la collectivité correspond à la maximisation du surplus global dégagé par les projets :

$$\underset{x}{Max} \quad W(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i VAN_i$$

Les x_i ont une valeur nulle lorsque le projet n'est pas réalisé et égale à l'unité lorsque le projet est réalisé en totalité. Nous supposerons qu'il est possible de réaliser partiellement un projet, le x_i correspondant étant alors compris entre 0 et 1. Pour un projet k réalisé partiellement, les valeurs $x_k.VAN_k$ et $x_k.S_k$ retenues sont supposées proportionnelles à VAN_k et S_k en fonction de x_k. Nous verrons plus tard que cette hypothèse tout à fait théorique, de réalisation partielle des projets, n'est pas très contraignante.

$$0 \leq x_i \leq 1, \forall i = 1,...,n$$

Lorsque l'optimisation se fait sans contrainte de rareté des budgets publics, la création de valeur maximale est atteinte en mettant en œuvre tous les projets dont la VAN est positive. C'est un résultat trivial.

Nous introduisons maintenant un budget (B) positif, qui plafonne les dépenses d'investissement.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i S_i \leq B$$

On obtient au total le système d'optimisation sous contraintes suivant. Cette manière de formaliser le problème est proche de celle de Weingartner (1963), lorsqu'il se proposa de résoudre le problème fondamental posé par Lorie et Savage. Toutefois, son travail de résolution s'est concentré sur approche en termes de programmation linéaire.

$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{x}{Max} \quad W(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i VAN_i \\ s.c. \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i S_i - B \leq 0 \\ -x_i \leq 0, \quad \forall i = 1,...,n \\ x_i - 1 \leq 0, \quad \forall i = 1,...,n \end{cases} \end{array}}$$

Cette modélisation est relativement satisfaisante et complète. Elle possède surtout l'avantage d'être relativement clair et est de nature à faciliter l'interprétation des résultats. Cette formalisation contient une hypothèse décisive (concernant la réalisation partielle des projets) qui nous permettra d'écrire un lagrangien sans postuler une relation fonctionnelle entre les paramètres VAN et S. Les *2n* contraintes sur les x_i permettent de transformer le problème de choix discret, pour le résoudre de manière analytique.

En pratique, les projets sont soit réalisés en totalité, soit ne le sont pas du tout. La possibilité de réaliser un projet partiellement, tout en bénéficiant proportionnellement de ses caractéristiques (VAN et S), est essentiellement un outil théorique. Cela dit, la réalisation partielle d'un projet ne sera *in fine* que marginale dans la solution du programme. Un projet au plus sera dans ce cas. Le vecteur solution x* est constitué d'un ensemble de 1 (projets réalisés), d'un ensemble de 0 (projets non réalisés), et d'une valeur comprise entre 0 et 1 pour le projet « limite » x_k. En supposant que les projets sont ordonnés selon leur priorité de réalisation, on a :

$$x^* = \left(\underbrace{1,\dots\dots.1}_{\text{projets acceptés}}, x_k, \underbrace{0,\dots\dots.,0}_{\text{projets rejetés}} \right)$$

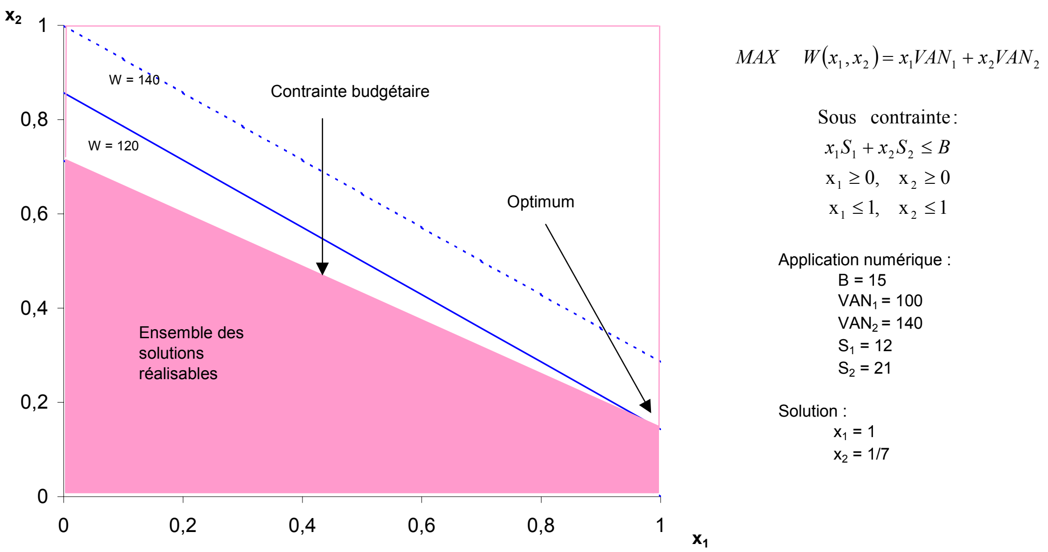
Puisque les caractéristiques attachées à chaque projet sont fixes, si la réalisation d'un projet doit se faire pour augmenter de la meilleure façon le bien-être collectif, alors le projet sera fait en totalité. Le meilleur projet sera réalisé en totalité, puis le deuxième, le troisième etc…jusqu'à saturation de la contrainte budgétaire. C'est le projet « limite » qui risque de ne pas être terminé, et seulement celui-là.

Dans les cas réels, les projets d'infrastructure nécessitent plusieurs années de réalisation, ce qui est potentiellement le lieu d'un ajustement entre le budget annuel et les projets financés. On peut aussi considérer que le budget B n'est fixé par le gouvernement que dans son ordre de grandeur. Des ajustements ponctuels et marginaux sont toujours possibles. Il existe des marges de manœuvre pour éviter les absurdités qu'engendreraient les discontinuités. Pour toutes ces raisons, le choix de formaliser les x_i de manière continue entre 0 et 1 nous paraît acceptable, et le cas du projet *k*, ne pas poser de problèmes.

D'autres hypothèses, plus critiques, seront examinées que dans les développements de la seconde partie. En particulier, la VAN et le besoin de subvention des projets peuvent évoluer au cours du temps avec des vitesses différentes selon les projets et les paramètres. Ce que nous n'avons pas pris en compte.

La figure 3 propose une application du programme d'optimisation avec deux projets. La VAN du projet 2 est supérieure à celle du projet 1. Pourtant c'est la réalisation du projet 1 en totalité et de 1/7^{e} du projet 2 qui permet d'atteindre la courbe d'indifférence la plus élevée. Ce résultat ne peut être compris qu'à la lumière des besoins de subvention, qui doublent quasiment d'un projet à l'autre. On peut remarquer que sur cet exemple, les projets sont rangés dans l'ordre du ratio VAN/S.

Figure 3 : Ordre optimal de réalisation sous contrainte financière, le cas de deux projets



Pour résoudre le programme d'optimisation, nous n'utilisons pas exactement le Lagrangien de Kuhn et Tucker. Nous choisissons d'inclure les contraintes de non-négativité des x_i. Le lagrangien généralisé que nous optimisons est le suivant :

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n)=\sum_{i=1}^{n}x_iVAN_i-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_iS_i-B\right)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(-x_i)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_i-1)$$

Les conditions de Kuhn et Tucker concernant la résolution de ce lagrangien sont :

- (1) $\dfrac{\partial L}{\partial x_i}=\dfrac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}x_iVAN_i\right)}{\partial x_i}-\lambda\dfrac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}x_iS_i-B\right)}{\partial x_i}-\alpha_i\dfrac{\partial(-x_i)}{\partial x_i}-\beta_i\dfrac{\partial(x_i-1)}{\partial x_i}=0,\ \forall \mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{n}$
- (2) $-\lambda\dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_iS_i-B\right)=0$
- (3) $-\alpha_i\dfrac{\partial L}{\partial\alpha_i}=\alpha_ix_i=0,\ \forall \mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{n}$
- (4) $-\beta_i\dfrac{\partial L}{\partial\beta_i}=\beta_i(x_i-1)=0,\ \forall \mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{n}$
- $\lambda,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n\geq 0$

Il faut bien sûr ajouter à ces conditions du premier ordre l'ensemble des inéquations figurant dans le programme d'optimisation.

Si tous les projets n'ont pas des caractéristiques (VAN et S) équivalentes et qu'un maximum existe, alors ce maximum est unique car nous sommes en présence d'une fonction objectif linéaire et de contraintes linéaires. Géométriquement, si la solution existe alors elle est unique dès lors que les pentes de la contrainte budgétaire et de la fonction objectif sont différentes. S'il existe un vecteur x*, différent du vecteur nul, solution du programme d'optimisation pour des multiplicateurs non négatifs, alors x* est un maximum global.

Pour ce qui est de l'existence du maximum global, c'est une propriété importante des ensembles compacts qui nous l'assure. En effet, toute fonction continue dont le domaine de définition est un ensemble compact C atteint son maximum global sur C. Le domaine de définition de notre problème est :

$$C_{S,B} = \left\{ x \in R^n ; x_1 \geq 0,\ldots,x_n \geq 0, x_1 \leq 1,\ldots,x_n \leq 1, x_1 S_1 + \ldots + x_n S_n \leq B \right\}$$

$C_{S,B}$ est un ensemble fermé, il inclut tous les éléments situés à la « frontière » de l'ensemble. C'est aussi un ensemble borné puisque tout les $x_i \in C_{S,B}$ sont bornés supérieurement, au moins par 1. $C_{S,B}$ est un ensemble compact puisqu'il est fermé et borné. Le théorème de Weierstrass[19] nous assure que la fonction W atteint un maximum sur $C_{S,B}$. Pour chaque vecteur de subvention S et chaque budget B, il existe un vecteur x*(S,B) qui maximise W sur $C_{S,B}$. Nous sommes assurés que x* est non vide.

2.2.2 Le rôle central du coût d'opportunité des fonds publics

La première étape du résultat est de montrer l'expression de la contrainte budgétaire sous la forme d'une unique variable, le coût d'opportunité des fonds publics. Les multiplicateurs de Kuhn et Tucker sont non négatifs par définition. Ils sont positifs lorsque la contrainte qui leur est associée est saturée et nuls lorsque que cette contrainte est non saturée. Pour le projet « limite » k, vérifiant $0 < x_k < 1$, on a d'après (1) :

$$VAN_k - \lambda S_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{VAN_k}{S_k} = \lambda \quad (5)$$

Dans le cas d'un desserrement marginal de la contrainte budgétaire à l'optimum, c'est uniquement la réalisation du projet *k* qui va être affectée. On peut donc écrire les différentiels suivants à l'optimum :

$$dB = S_k dx_k \quad (6)$$
$$dW = VAN_k dx_k \quad (7)$$

En combinant les équations (5), (6) et (7) on obtient :

$$\frac{dW}{dB} = \lambda$$

λ est dans cette formulation la variation de surplus collectif induite par un desserrement de la contrainte financière. C'est le montant maximum de surplus que la collectivité peut espérer faire correspondre à une unité budgétaire supplémentaire.

---

[19] Théorème de Weierstrass (SIMON et BLUM 1998) : Soit F: C → R une fonction continue dont le domaine de définition est un sous-ensemble compact C de R^n. Alors il existe des points x_m et x_M dans C tels que $F(x_m) \leq F(x) \leq F(x_M)$ pour tout $x \in C$. x_m est alors le minimum global de F dans C et x_M est le maximum global de F dans C.

Le multiplicateur λ est associé à la contrainte budgétaire, il représente le coût d'opportunité des fonds publics. λ résume la contrainte budgétaire à la manière d'un prix (prix dual de la contrainte). Plus λ est élevé, plus la contrainte budgétaire est forte. C'est un indicateur de rareté des ressources budgétaires.

Il est important de ne pas assimilé ce coût d'opportunité au coût social des fonds publics. Le coût social des fonds publics (*shadow cost of public funds*) est formé par les coûts de la collecte de l'impôt et les distorsions de prix associés. Dans les bilans socio-économiques, la prise en compte de ce coût implique une pondération des apports publics par (1+μ), avec μ le coût social des fonds publics. Laffont et Tirole (1993) estiment[20] que μ a une valeur de 0,3 aux Etats-Unis à la fin des années 1980. Le CGP a considéré en 1987 qu'il serait utilisé en France la valeur de μ = 0,5 pour pondérer les dépenses publiques dans les ACA. Le récent rapport concernant la révision du taux d'actualisation (CGP 2005) propose la valeur de 0,3.

Lorsque le calcul socio-économique inclut les effets liés au paramètre μ, il ne s'agit plus de considérer comme socialement rentables tous les projets qui disposent d'une VAN positive. Un terme supplémentaire doit être extrait de la VAN pour prendre en compte le coût social des fonds publics. Le critère de rentabilité des projets devient VAN-μS > 0, avec S la contribution publique nette des recettes ou économies publiques.

Il ne faut pas confondre λ et μ. Le coût d'opportunité des fonds publics λ est autre chose qu'un coût social lié à la collecte de l'impôt et aux distorsions de prix engendré par ce prélèvement. μ est uniquement une mesure de l'efficacité des systèmes fiscaux, qui ne permet pas d'arbitrer entre deux projets publics. A l'inverse, λ considère l'utilisation alternative que pourrait avoir les fonds. Dans le cas de plusieurs projets publics respectant tous le critère VAN-μS > 0, μ ne donne pas les moyens de trancher entre les projets lorsqu'il existe une contrainte financière. λ prend en compte une utilisation alternative dans un projet financé par la collectivité, et permet d'organiser l'ordre des projets que va réaliser la collectivité comme nous allons le voir. La disponibilité des fonds publics agit comme une contrainte majorant celle de l'imposition. Le coût social des fonds publics permet de disqualifier un certain nombre de projets, en prenant en compte la totalité des coûts du subventionnement. Mais pour choisir, dans un second temps parmi les projets « qualifiés » (si besoin), il faut les soumettre au coût d'opportunité des fonds publics λ.

2.2.3 Du coût d'opportunité des fonds publics au classement des projets

A partir des conditions de premier ordre, et en notant $\gamma_i = \beta_i - \alpha_i$ on a :

$$(1) \Leftrightarrow VAN_i - \lambda S_i + \alpha_i - \beta_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{VAN_i - \gamma_i}{S_i} = \lambda$$

Pour un projet i, avec une VAN et un besoin de subvention donnés, c'est le paramètre γ_i qui va permettre l'ajustement à λ (unique). Ce paramètre γ_i résume donc les qualités d'un projet. Pour un bon projet, un γ_i élevé va diminuer le numérateur jusqu'à égalisation avec λ. Et inversement, un mauvais projet aura un γ_i faible (voire négatif) pour permettre à la fraction ci-dessus d'atteindre le niveau du coût d'opportunité des fonds publics.

[20] p. 38, en se fondant sur les estimations de Ballard, Shoven et Whalley (1985) et de Hausman et Poterba (1987)

2.2.3.1 Les projets réalisés en totalité

Les conditions de Kuhn et Tucker impliquent :

- Quand la contrainte « $-x_i \leq 0$ » n'est pas saturée, on a donc $\alpha_i = 0$
- Quand la contrainte « $x_i - 1 \leq 0$ » est saturée, on a donc $\beta_i > 0$

La variable γ du projet i est dans ce cas de figure positive : $\gamma_i = \beta_i > 0$

En indiçant de la lettre A les projets acceptés, on montre que :

$$\gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad VAN_A - \lambda S_A > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{VAN_A}{S_A} > \lambda} \qquad (8)$$

L'ensemble des projets acceptables n'est pas composé de l'ensemble de ceux disposant d'une VAN positive. Ne sont retenus que ceux ayant un ratio VAN/S supérieur au coût d'opportunité de l'argent public λ.

2.2.3.2 Les projets rejetés

Les conditions d'optimisation impliquent :

- La contrainte « $-x_i \leq 0$ » est saturée, on a donc $\alpha_i > 0$
- La contrainte « $x_i - 1 \leq 0$ » n'est pas saturée, on a donc $\beta_i = 0$

On a par conséquent dans ce cas $\gamma_i = -\alpha_i < 0$

En indiçant de la lettre R les projets rejetés :

$$\gamma < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{VAN_R}{S_R} < \lambda} \qquad (9)$$

Les projets rejetés ont un ratio VAN/S inférieur au coût d'opportunité des fonds publics.

2.2.3.3 Ordre optimal

(8) et (9) impliquent : $\boxed{\frac{VAN_A}{S_A} > \lambda > \frac{VAN_R}{S_R}}$

Les projets acceptés doivent toujours avoir un ratio VAN/S supérieur à celui des projets rejetés. On privilégie les projets produisant le plus de valeur par euro public investi.

Si on fait varier λ (desserrement de la contrainte budgétaire) on construit une hiérarchisation totale des priorités selon le critère VAN/S. Pour optimiser le surplus global sous contrainte budgétaire, lorsqu'on ignore λ, il faut choisir en priorité les projets disposant d'un ratio « utilité collective par euro public investi » le plus élevé.

Peut-on expliquer pourquoi les projets doivent être rangés dans un ordre suivant ce critère et non selon l'ordre de la VAN ? En première approximation, certains penseront que la meilleure stratégie est d'abord de financer les projets apportant le plus de valeur, sans introduire le besoin de subvention. C'est oublier qu'un projet rapportant beaucoup mais mobilisant la plupart des crédits limite d'autant la satisfaction procurée par de nombreuses « petites valeurs » obtenues pour un faible prix. C'est typiquement le problème soulevé par la ligne à grande vitesse (LGV) qui supportera le TGV entre Paris et Strasbourg. L'énorme besoin de subvention lié à ce projet a conduit à différer de plusieurs années d'autres projets, plus petits mais dont le ratio VAN/S est nettement meilleur comme la LGV Rhin-Rhône. Le critère normatif de la « VAN par euro public investi » est un ratio qui prend en compte la valeur créée (VAN), mais relativement à son prix (S).

2.3. Essai d'estimation du coût d'opportunité des fonds publics en France

Comme nous venons de le montrer, le coût d'opportunité des fonds publics est à la frontière des projets acceptés et des projets refusés. Il est donc possible d'imaginer que ce coût d'opportunité des fonds publics est révélé soit par le projet accepté ayant le plus faible ratio VAN/S, soit par le projet refusé ayant le plus fort VAN/S. Les données disponibles ne nous permettent pas de faire une approximation très précise du cas français. De plus, le ministère français des transports vient juste de rendre officiel ce critère qui n'était pas pris en compte avant 2005. Le tableau 1 estime le ratio des projets autoroutiers dont les données sont disponibles sur la base du rapport du CGP (1993). La figure 4 montre ces projets autoroutiers organisés selon critère VAN/S. La relation entre le ratio VAN/S et le budget B cumulé est décroissante. Après les projets les plus évidents (ces 7 projets ne figurent pas sur le graphique pour des questions d'échelle et de lisibilité), la pente de la courbe s'atténue. Le montant B, que se donne le gouvernement annuellement, va nous permettre d'approcher le coût d'opportunité des fonds publics en 2000 dans le cas de ces projets autoroutiers. Nous cherchons à estimer λ en considérant qu'il est révélé par le montant budgétaire, sachant les projets « sur la table » à cet époque.

Tableau 1 : les projets autoroutiers « sur la table » en 1993 (données disponibles)

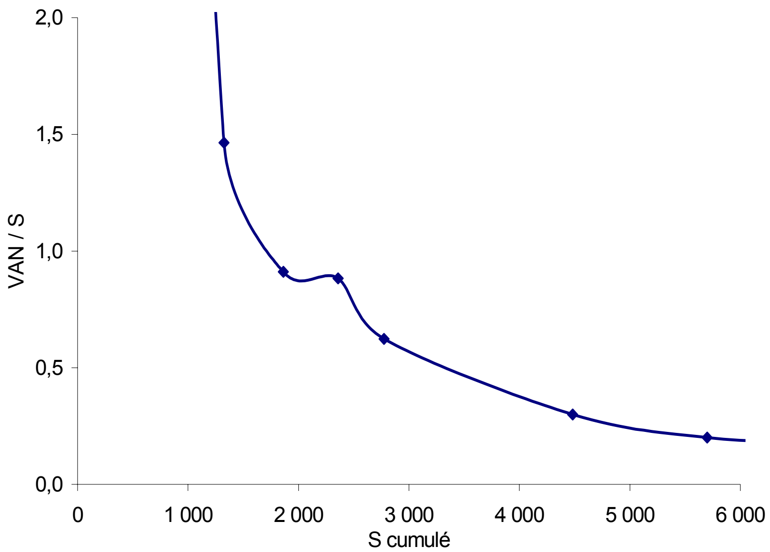
Dénomination du projet	TRI	TRE	Coût (M€)	VAN (recalculé)	S (recalculé)	S cumulé	VAN/S
Sens - Courtenay	10,1%	14,6%	197	186	0	0	n.c.
Dijon - Dôle	9,5%	15,6%	213	223	0	0	n.c.
Annemasse - Thonon	7,9%	18,3%	378	468	5	5	97,66
L'Isle-Adam - Amiens	6,1%	45,0%	488	4 030	115	119	35,16
Toulouse - Pamiers	4,1%	55,0%	450	6 501	268	387	24,30
Dôle - Bourg	7,1%	20,0%	737	998	68	455	14,63
Arles - Salon	7,5%	14,0%	283	215	21	476	10,30
Grenoble - Sisteron	2,5%	16,8%	1 408	1 243	849	1 325	1,46
Amiens - Boulogne	2,7%	15,0%	669	491	539	1 864	0,91
Saintes - Rochefort	2,3%	19,7%	290	437	495	2 358	0,88
Orléans - Courtenay	3,0%	13,0%	470	259	416	2 774	0,62
Troyes - Auxerre	0,9%	13,0%	1 068	513	1 709	4 483	0,30
Lyon - Balbigny	1,2%	11,2%	770	244	1 217	5 699	0,20
Amébrieu - Bourgoin	1,2%	11,2%	605	201	1 146	6 845	0,18

n.c. : non concerné

Sources : Les paramètres VAN et S reconstitués à partir des TRI et TRE et coûts sur la base du modèle de Bonnafous (2002) et au prix de quelques hypothèses complémentaires. Les TRI sont issus des calculs de la Direction de la Prévision (CGP 1993, p. 86). Les TRE sont fournis par la Direction des Routes (CGP 1993, p. 86) et ajustés en fonction des données du rapport d'audit de 2003. Les sources sur les coûts proviennent des documents précédents, du rapport de la cour des comptes (1999) et de TDIE-Isis/Setec International (2002). Toutes ces données sont calculées pour une mise en service en 2000.

En décembre 2003, le Comité Interministériel d'Aménagement et de Développement du Territoire (CIADT) décide de créer l'Agence de Financement des Infrastructures de Transport en France (AFITF). C'est une ressource nouvelle, « débudgétisée », d'un montant prévu de 635 millions d'euro en 2005. Le financement des projets en cours qui n'ont pas été inscrit lors de ce CIADT sera poursuivi. Une enveloppe de 844 millions d'euros en autorisation de programme est ouverte sur le budget général, dont 536 millions d'euros pour le secteur routier. Plus généralement, les dépenses en infrastructures de transports allouées aux autoroutes concédées oscillent entre 1,5 et 3 milliards d'euros depuis 1990[21]. Le taux de subvention moyen étant très certainement inférieur à 50% à cette époque[22], il est très possible que les subventions nationales aient été de 1,5 milliard d'euros par an au maximum pour les autoroutes concédés. La figure 4 nous oriente donc vers un coût d'opportunité qui serait supérieur à 1.

Figure 4 : Coût d'opportunité des fonds publics et contrainte budgétaire, le cas des autoroutes à péages concédés



D'aucuns déduiront trop rapidement qu'il est logique que le rapport entre la valeur créée et la subvention soit proche et supérieur à 1. Rappelons que le numérateur n'est pas la « valeur brute », mais la « valeur nette » (VAN) de laquelle a déjà été déduite la subvention. λ peut tout à fait être compris entre 0 et 1 si la contrainte financière est faible. Il est théoriquement nul en l'absence de rationnement du capital. Le plancher qu'il faudrait respecter dans ce cas pour une allocation optimale des ressources est le coût social des fonds publics(μ). Pour être tout à fait clair, le résultat de cette approximation conduit à un prix total de la subvention ($1+\lambda$) supérieur à 2 fois le montant nominal de la subvention.

---

[21] Source : Les comptes de transports en 2002 (DAEI/SES-Insee) - juin 2003

[22] Le système d'adossement de l'époque rend difficile le chiffrage du budget réel. Ilse fondait une péréquation peu transparente qui ne nous permet pas de connaître les taux de subvention, les investissements étant financés sous forme de modifications tarifaires ou d'allongements des concessions à l'intérieur même des société d'économie mixte concessionnaires d'autoroutes (SEMCA).

Les données ferroviaires dont nous disposons (cf. tableau 2) tendent à confirmer que le coût d'opportunité des finances publiques est supérieur à 1 en France, puisque ces deux projets sont en bonne voie. Ce deuxième exemple concordant conduit à penser que les projets d'infrastructure de transport n'ayant pas une VAN supérieure à leur besoin de subvention (VAN/S < 1) doivent être différés.

Tableau 2 : Coût d'opportunité des fonds publics et projets ferroviaires de lignes à grande vitesse

	LGV de Bretagne Pays de Loire (participation RFF = 10%)	LGV Rhin-Rhône Branche Est (participation RFF = 15%)
Investissement actualisé	2 413	2 301
Subvention actualisée	2 172	1 956
VAN	3 002	3 296
dont		
- Usagers	6 781	5 459
- Transporteurs aériens & routiers	-1 447	-1 026
TRE	8,5%	7,8%
VAN par euro public	1,38	1,69

Source : RFF. Les valeurs sont en millions d'euros 2003. Elles sont obtenues avec une actualisation à 4% et un scénarios de croissance du PIB de 1,9%. Notons que la plus forte participation de RFF pour le projet de LGV Rhin-Rhône améliore son ratio. A niveau équivalent la subvention serait amputée de 120 M€.

Pour conclure, rappelons que l'Analyse Coûts-Avantages est une base indispensable pour sélectionner les projets à réaliser. Toutefois, l'ordonnancement des investissements est nécessaire en période de rationnement du financement. Le modèle que nous avons développé montre que le critère « VAN par euro public investi » a des bases théoriques relativement solides pour soutenir cette hiérarchisation.

Soulignons que ce critère est tout à fait conforme aux résultats standards de la micro-économie. Sa signification a un lien direct avec la théorie du consommateur : à l'équilibre de son optimisation d'utilité, le consommateur égalise tous les rapports entre utilité marginale et prix. Notre modélisation permet simplement de relâcher les hypothèses de divisibilité des quantités consommées et d'utilité variable selon la quantité consommée. Le résultat n'en est que plus acceptable pour traiter le cas d'investissements indivisibles et uniques par nature.

Le critère de la VAN par euro public investi semble avoir les moyens d'être un outil utile pour les décideurs publics en situation de raréfaction des financement. Il est d'autant plus précieux qu'il est théoriquement fondé. Toutefois, cet instrument doit aussi être manipuler avec précaution. Il existe un domaine de validité, large mais limité, qui est précisé dans la partie suivante.

3. Modélisation dynamique

Cette troisième partie va nous permettre d'étudier les conséquences du relâchement d'une hypothèse importante du modèle de base : le caractère statique des paramètres associés aux projets. Nous avons précédemment supposé qu'il n'y avait aucune dynamique pour les variables VAN et S des projets. Or il est tout à fait probable que les projets n'aient pas tous le même profil d'évolution dans le temps en termes d'utilité collective et de besoin de subvention. Dans ce qui suit, nous expliciterons les conséquences sur l'ordre optimal de réalisation de cette hypothèse.

Afin de bien comprendre les effets liés au temps, aux évolutions différentes des projets, nous décomposerons l'étude en deux modèles. Le premier (3.1) proposera une généralisation du modèle de base permettant de faire apparaître une généralisation des solutions du modèle. Une discussion de ces équations permettra de mettre en évidence la robustesse du critère VAN/S, mais aussi ses limites et les précautions nécessaires. Le second modèle (3.2) se positionne à un niveau plus fin, puisque nous spécifions une forme fonctionnelle permettant de capter le rôle du temps sur la valeur des projets. Il s'agira de revenir sur un point mis en évidence dans la section 3.1, à savoir la date optimale de chaque projet indépendamment des autres. Nous montrerons qu'il existe trois catégories de projets : ceux qui ne devront jamais être réalisés, ceux pour lesquels il faut attendre et ceux qui doivent être réalisés sans tarder.

3.1. Ordre de réalisation et dynamique des projets : généralisation

3.1.1 Modélisation

La fonction objectif généralisée de la collectivité incluant le temps est modélisée par :

$$\underset{x}{Max} \quad W(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=0}^{T} x_{it} VAN_{it}$$

Il faut bien sûr préciser, au sujet des valeurs de la VAN à différentes périodes, que les données sont supposées actualisées à la même date pour être comparables (en t = 0 par exemple). Il en sera de même pour toutes les valeurs monétaires ou monétarisées qui seront incluses dans le modèle, notamment les subventions et les budgets.

Les x_{it} ont une valeur nulle lorsque le projet i n'est pas réalisé à la date t et égale à l'unité lorsque le projet est réalisé en totalité à cette date.

$$0 \le x_{it} \le 1, \forall i, t$$

Aux projets correspondent un besoin de subvention positif : $0 \le S_{it}, \forall i, t$. A chaque période est alloué un budget B_t. Les T contraintes budgétaires s'écrivent :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{it} S_{it} \le B_t, \forall t$$

Un lot de contraintes supplémentaires est nécessaire, par rapport au modèle de base. Lorsqu'un projet i est réalisé à une date t, il ne peut plus l'être à une autre date. Si un projet est réalisé, il doit être écarté de la liste des projets restant à faire puisque les projets que nous considérons sont uniques. Formellement, cette idée revient à écrire que nous restreignons les valeurs des x_{it} par :

$$0 \le \sum_{t=0}^{T} x_{it} \le 1, \forall i$$

Notons que deux contraintes sont redondantes, nous les écarterons :

- $0 \le x_{it},\ \forall i,t \quad \Rightarrow \quad 0 \le \sum_{t=0}^{T} x_{it},\ \forall i$
- $0 \le x_{it},\ \forall i,t$ et $\sum_{t=0}^{T} x_{it} \le 1,\ \forall i \quad \Rightarrow \quad x_{it} \le 1,\ \forall i$

A partir de la fonction objectif généralisée et des différentes contraintes, nous construisons le système d'optimisation sous contrainte suivant :

$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{x}{Max} \quad W(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{T} x_{it} VAN_{it} \\ s.c. \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{it} S_{it} - B_t \le 0, & \forall t \\ -x_{it} \le 0, & \forall i,t \\ \sum_{t=0}^{T} x_{it} - 1 \le 0, & \forall i \end{cases} \end{array}}$$

Cette modélisation est très proche de celle du modèle de base. Nous renvoyons à ce modèle simplifié pour la discussion concernant les projets « limites ». L'hypothèse de continuité des x_{it} entre 0 et 1 a les mêmes implications limitées.

Le Lagrangien généralisé que nous optimisons est le suivant :

$$\begin{aligned} L(\ldots, x_{it}, \ldots, \lambda_t, \ldots, \delta_i, \ldots, \alpha_{it}, \ldots) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{T} x_{it} VAN_{it} - \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \left(\sum_{i=1}^{n} x_{it} S_{it} - B_t \right) \\ - \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\sum_{t=0}^{T} x_{it} - 1 \right) \\ - \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{T} \alpha_{it} (-x_{it}) \end{aligned}$$

Les conditions de premier ordre concernant la résolution de ce lagrangien sont :

- (1) $\frac{\partial L}{\partial x_{it}} = VAN_{it} - \lambda_t S_{it} - \delta_i + \alpha_{it} = 0,\ \forall \mathrm{i,t}$
- (2) $-\lambda_t \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = \lambda_t \left(\sum_{i=1}^{n} x_{it} S_{it} - B_t \right) = 0,\ \forall \mathrm{t}$
- (3) $-\delta_i \frac{\partial L}{\partial \delta_i} = \delta_i \left(\sum_{t=0}^{T} x_{it} - 1 \right) = 0,\ \forall \mathrm{i}$

- (4) $-\alpha_{it}\dfrac{\partial L}{\partial \alpha_{it}} = \alpha_{it}x_{it} = 0,\ \forall \mathrm{i, t}$

- $\lambda_t, \alpha_{it}, \delta_i \geq 0,\ \forall \mathrm{i, t}$

Nous supposons les conditions suffisantes du second ordre vérifiées pour les mêmes raisons que dans le modèle de base.

3.1.2 Les solutions du programme

Les équations du programme peuvent interpréter à partir d'hypothèse de saturation ou de non saturation des contraintes :

- Nous supposons les contraintes budgétaires saturées à chaque date t, $\lambda_t \geq 0,\ \forall \mathrm{t}$.
- La contrainte associée à la réalisation du projet i est :
  - Soit saturée : multiplicateur $\delta_i \geq 0$. Le projet x_i a été réalisé à une date t
  - Soit non saturée : multiplicateur $\delta_i = 0$. Le projet x_i n'a pas été réalisé, ou seulement en partie.
- La contrainte associée à la réalisation d'un projet à une date t est :
  - Soit saturée : multiplicateur $\alpha_{it} \geq 0$. Le projet x_i a été réalisé à la date t considérée
  - Soit non saturée : multiplicateur $\alpha_{it} = 0$. Le projet x_i est réalisé en t, ou seulement en partie.

3.1.2.1 Projets refusés

Un certain nombre de projets j sont toujours rejetés, quelque soit t. Dans ces cas : $\delta_j = 0$.
D'après (1), on a : $VAN_{jt} - \lambda_t S_{jt} + \alpha_{jt} = 0,\ \forall \mathrm{t}$

Or $\alpha_{jt} \geq 0$ caractérise aussi ces projets. En combinant ces deux caractéristiques, on obtient :

Pour tout projet j : $\boxed{VAN_{jt} - \lambda_t S_{jt} \leq 0,\ \forall \mathrm{t}}$ (5.1) ou $\boxed{\dfrac{VAN_{jt}}{S_{jt}} \leq \lambda_t,\ \forall \mathrm{t}}$ (5.2)

Les projets rejetés ne parviennent jamais à avoir une valeur incluant le coût d'opportunité des fonds publics positive. En d'autres termes, équation (5.2), la valeur qu'ils produisent par euro public investi ne dépasse jamais le coût d'opportunité des fonds publics. Si une année la contrainte budgétaire est très faible (λ_t est proche de 0), l'équation (5) implique que la VAN du projet est négative à cette date.

3.1.2.2 Projets réalisés à une date t*

D'autres projets seront acceptés. Ces projets l possèdent deux caractéristiques :

- $\delta_l \geq 0$
- $\alpha_{lt} \geq 0$ sauf l'année t* de réalisation où $\alpha_{it*} = 0$

En t*, d'après (1) on a : $VAN_{lt*} - \lambda_{t*} S_{lt*} - \delta_l = 0$

Or $\delta_l \geq 0$, ce qui implique :

Pour tout projet l : $\boxed{VAN_{lt*} - \lambda_{t*} S_{lt*} \geq 0}$ (6.1) ou $\boxed{\dfrac{VAN_{lt*}}{S_{lt*}} \geq \lambda_{t*}}$ (6.2)

Contrairement au résultat précédent, l'équation (6) nous dit que les projets réalisés à une date t* ont une production de valeur par euro public investi qui dépasse le coût d'opportunité des fonds publics. Par contre, cette équation n'impose aucune restriction concernant la valeur par euro public investi aux autres dates t.

Une seconde relation peut être mise en évidence comparant la valeur aux dates t et celle en t*. L'équation (6) donne tous les moments de la réalisation possibles. Une seconde relation, qui caractérise le moment optimal (unique) de réalisation t* pour chaque projet, peut être mise en évidence.

D'après (1), on peut écrire les deux équations suivantes :

$VAN_{lt*} - \lambda_{t*} S_{lt*} = \delta_l$ et $VAN_{lt} - \lambda_t S_{lt} + \alpha_{lt} = \delta_l$

or $\alpha_{lt} \geq 0, \ \forall t$ et $\alpha_{lt*} = 0$ d'où :

Pour tout projet l : $\boxed{\dfrac{VAN_{lt*} - \lambda_{t*} S_{lt*}}{VAN_{lt} - \lambda_t S_{lt}} \geq 1, \ \forall t}$ (7.1) ou $\boxed{VAN_{lt*} - \lambda_{t*} S_{lt*} \geq VAN_{lt} - \lambda_t S_{lt}, \ \forall t}$ (7.2)

Cette équation (7) caractérise, pour chaque projet l, la date optimale de réalisation en fonction de ses propres VAN et S, mais aussi par rapport aux évolutions de la contrainte budgétaire. Cette équation est valable pour tous les projets l, elle pourrait être étendue aux projets j. Pour les projets j, il existe aussi une date optimale, mais qui n'est pas synonyme de création de valeur par euro public suffisante (supérieure aux coûts d'opportunité).

Si les λ_t sont connus (ainsi que les VAN_{it} et S_{it} bien sûr), les dates optimales par projet peuvent être déterminées sans difficultés. Pour les projets à leur maximum (décrit par l'équation (7)), les équations (5) et (6) mettent en évidence ceux qui doivent être réalisés rapidement.

Cependant, lorsque la contrainte budgétaire (λ_t) varie de manière significative et imprévisible, le classement des projets dans l'ordre optimal est impossible sans hypothèses complémentaires. Nous expliciterons par la suite le fait que c'est « l'endogénéité » du maximum aux niveaux des contraintes budgétaires qui bloque toute préconisation en terme d'ordre absolu des projets.

3.1.2.3 Les projets « limite »

Il est enfin possible de caractériser les projets qui ne seront pas réalisés en totalité. Ces projets k possèdent deux caractéristiques :

- $\delta_k = 0$
- $\alpha_{kt} \geq 0$ sauf la ou les années t* de réalisation partielle où $\alpha_{kt*} = 0$

En t*, on a : $VAN_{kt*} - \lambda_{t*} S_{kt*} = 0$

En t, on vérifie $VAN_{kt} - \lambda_t S_{kt} + \alpha_{kt} = 0$

d'où : $VAN_{kt} - \lambda_t S_{kt} \leq 0$

La réalisation de ces projets k n'est pas socialement utile dans les période t, puisqu'on y retrouve la condition (5). En revanche, il peut exister des dates t* pour lesquelles le projet apporte une valeur par euro public supérieure à λ_{t*} et suffisante. Le projet k, au moins en partie, devient alors rentable à réaliser.

Symétriquement, à VAN et subventions constantes, un relâchement de la contrainte budgétaire à une date t (λ_t plus faible) peut impliquer que le projet devienne profitable à réaliser à cette date (au moins en partie).

Les solutions du modèle d'optimisation sont données par les équations (5), (6) et (7). Notons que la contrainte budgétaire est omniprésente puisqu'elle se manifeste dans chacune des équations par l'intermédiaire de λ (variable duale de la contrainte budgétaire).

3.1.3 Discussion

Nous reviendrons sur quelques cas particuliers qui permettent d'améliorer la compréhension des équations solutions, et de mettre en évidence les points précis qui limitent le critère de la VAN/S pour comparer les projets.

3.1.3.1 Cas de paramètres statiques

Vérifions tout d'abord que le modèle précédent est bien une généralisation du modèle de base. Si les VAN, les besoins de subventions S et les contraintes budgétaires B (et donc la variable duale de la contrainte budgétaire λ) sont constants, alors l'output de ce modèle est aussi celui du précédent.

Si $VAN_{it} = VAN_i$, $S_{it} = S_i$, $\lambda_t = \lambda$ pour tout *t* alors l'équation (7) n'a plus aucune pertinence. Les équations (5) et (6) s'écrivent respectivement : $\frac{VAN_j}{S_j} \leq \lambda$ et $\frac{VAN_l}{S_l} \geq \lambda$.

Nous retrouvons ici le résultat du modèle de base, la hiérarchisation des projet par le critère de la VAN par euro public investi est optimale.

3.1.3.2 Cas sans contrainte budgétaire

Considérons maintenant le cas d'une contrainte budgétaire nulle : λ = 0. Les équations d'optimalité (5), (6) et (7) s'écrivent :

$$\frac{VAN_{jt}}{S_{jt}} \leq 0 \ \forall \text{t} \ \ (8)\,, \quad \frac{VAN_{lt*}}{S_{lt*}} \geq 0 \ \ (9) \text{ et } \quad VAN_{lt*} \geq VAN_{lt} \ \ \forall \text{t} \ \ (10)$$

Le résultat est double. D'une part, il ne faut réaliser les projets que lorsque leur VAN est maximale (10). Nous reviendrons sur les caractéristiques du maximum lorsque nous spécifirons une forme fonctionnelle de la VAN dans la section 3.2. D'autre part, il ne faut réaliser que les projets qui possèdent une VAN positive lorsque celle-ci est à son maximum (9). L'équation 8 confirme que les projets rejetés n'ont jamais une VAN positive.

Nous retrouvons ici le cas simple des modèles sans contrainte budgétaire. Notons que le critère de la VAN par euro public investi permet d'arriver à la réalisation du programme optimale dans ce cas aussi.

3.1.3.3 Cas de court terme

L'hypothèse de besoins de subventions constants et d'une contrainte budgétaire stable paraît acceptable à court et moyen termes, durant un plan quinquennal par exemple. Nous supposons ici que $S_{it} = S_i$ et $\lambda_t = \lambda$ pour tout *t*. En d'autres termes, seule la VAN est dynamique et varie au cours du temps. Dans ce cadre, il est possible de montrer que l'équation (7) s'écrit aussi : $\frac{VAN_{It^*}}{S_{It^*}} \geq \frac{VAN_{It}}{S_{It}}$, $\forall$t

De toute évidence, le critère de la VAN par euro public investi conserve à moyen terme toute sa pertinence. Il existe toutefois une précaution importante à prendre que met en évidence ce cas (le cas précédent 3.1.3.2 aussi). Le processus de décision est en deux étape. Tout d'abord, il faut choisir le bon moment pour chaque projet. Et c'est seulement à cette date optimale individuelle que l'on compare les projets entre eux sur la base du ratio VAN/S.

Dans le même ordre d'idée, si deux des trois paramètres sont constants (VAN et λ ; VAN et S), nous retombons sur le critère de la VAN par euro public investi et le processus en deux étapes.

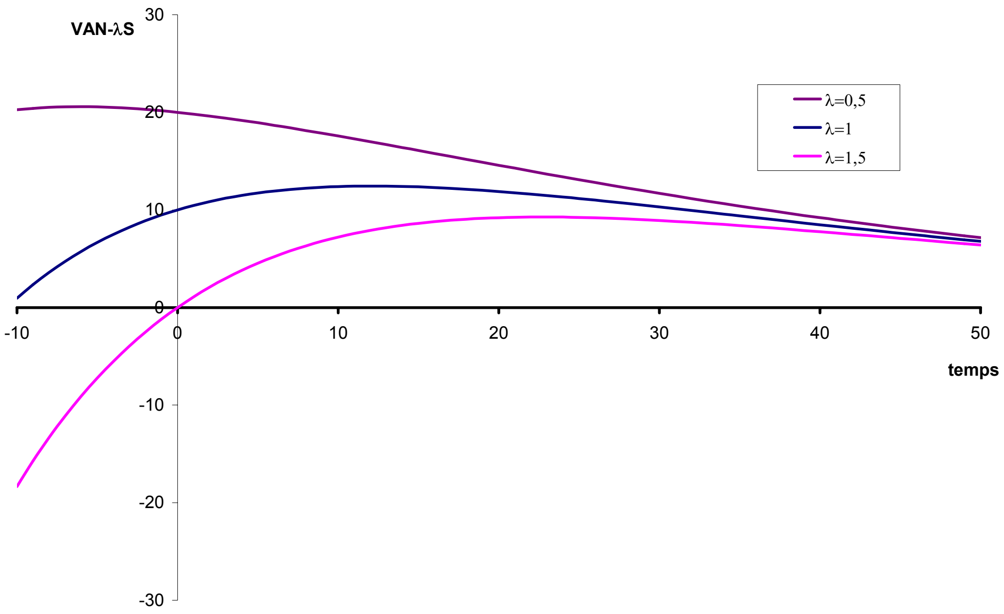
3.1.3.4 Cas général

Dans le cas général, l'équation (7) exprime la date optimale pour chaque projet. Elle commande de choisir le maximum de la fonction $VAN_{it} - \lambda_t S_{it}$ pour chaque i. Les équation (5) et (6) forment pour leur part la frontière entre les projets à réaliser et les projets à ne pas réaliser. L'idée d'un choix en deux étapes est une sortie essentielle du modèle. La confrontation entre les VAN/S des différents projets ne peut se faire que qu'à la date de leur maximum caractérisé par l'équation (7).

Toute la complexité de la solution de ce modèle généralisé vient du fait que le maximum décrit par l'équation (7) varie lorsque λ varie. La figure 5 montre bien que selon la valeur de λ, la date optimale de réalisation n'est pas la même. La date optimale de réalisation n'existe pas dans l'absolue, elle dépend de la contrainte budgétaire.

Le rôle de la contrainte budgétaire (par l'intermédiaire de λ) est plus complexe que dans le modèle de base car elle entre en jeu dans la détermination de la date optimale du projet. Par conséquent, l'ordre optimale n'existe pas pour tout λ. Cela dit, si les autorités publiques connaissent la valeur de leur coût d'opportunité des fonds publics ou son évolution, l'optimisation précédente donne les clés de la résolution de l'ordre optimal de réalisation des projets. Pour chacun des projets, il s'agit de calculer leur VAN-λS à toute les périodes, d'en choisir la date optimale en s'assurant que la valeur correspondante est positive.

Figure 5 : Date optimale de réalisation et modification de la contrainte budgétaire : application numérique



Pour essayer d'être plus explicites, écrivons l'équation (7) de manière différente :

$$VAN_{lt^*} - VAN_{lt} \geq \lambda_{t^*} S_{lt^*} - \lambda_t S_{lt},\ \forall t\ \ (7.3)$$

Dans cette nouvelle écriture, on lit que la date t* est préférée à la date t si la valeur créée (respectivement perdue) est supérieure à l'augmentation des besoins de subventions (respectivement aux économies de subventions), besoins de subvention qui sont pondérés par leur coût d'opportunité.

Une autre écriture est aussi possible : $\dfrac{VAN_{lt^*}}{S_{lt^*}} - \lambda_{t^*} \geq \left(\dfrac{VAN_{lt}}{S_{lt}} - \lambda_t\right)\dfrac{S_{lt}}{S_{lt^*}},\ \forall t\,.$ (7.4)

Cette équation 7.4 permet de constater que c'est l'écart du ratio VAN/S au coût d'opportunité des fonds publics pondéré par le besoin de subvention relatif qui est en jeu. La figure 6 représente les réalisations dans un modèle à deux périodes. Notons que la pente de la droite séparant les périodes optimales est le rapport des besoins de subvention, comme le montre l'équation 7.4. La figure 7 représente les effets d'une modification de l'ordre optimal lors du resserrement de la contrainte budgétaire.

En cas de resserrement de la contrainte budgétaire à la première période, il se produit deux effets que nous pourrions appeler effet de revenu et effet de substitution :

- Certains projets ne seront plus viables : les projets concernés sont ceux qui avaient une VAN/S trop faible pour être réalisés en t = 1 et très juste en t = 0. Mais il faut ajouter à cet effet relativement intuitif un autre effet qui l'est un peu moins.
- Certains projets vont avoir une date optimale différée, qui passe de 0 en 1. Pour ceux-là, la variation de la contrainte budgétaire en t = 0 induit qu'il est préférable de les réaliser en t = 1, alors qu'ils restent viables en t = 0. Ce changement concerne un nombre restreint de projets difficile à caractériser[23]. La conséquence est bien sûr aussi une modification de l'ordre optimal du programme d'infrastructures.

[23] Ils sont relativement bons en termes de VAN/S lors des deux périodes, et à des niveaux assez constants dans le temps (ou plutôt à des niveaux évoluant comme le rapport des subventions).

Figure 6 : Ordre optimal de réalisation sous contrainte budgétaire : modèle à 2 périodes

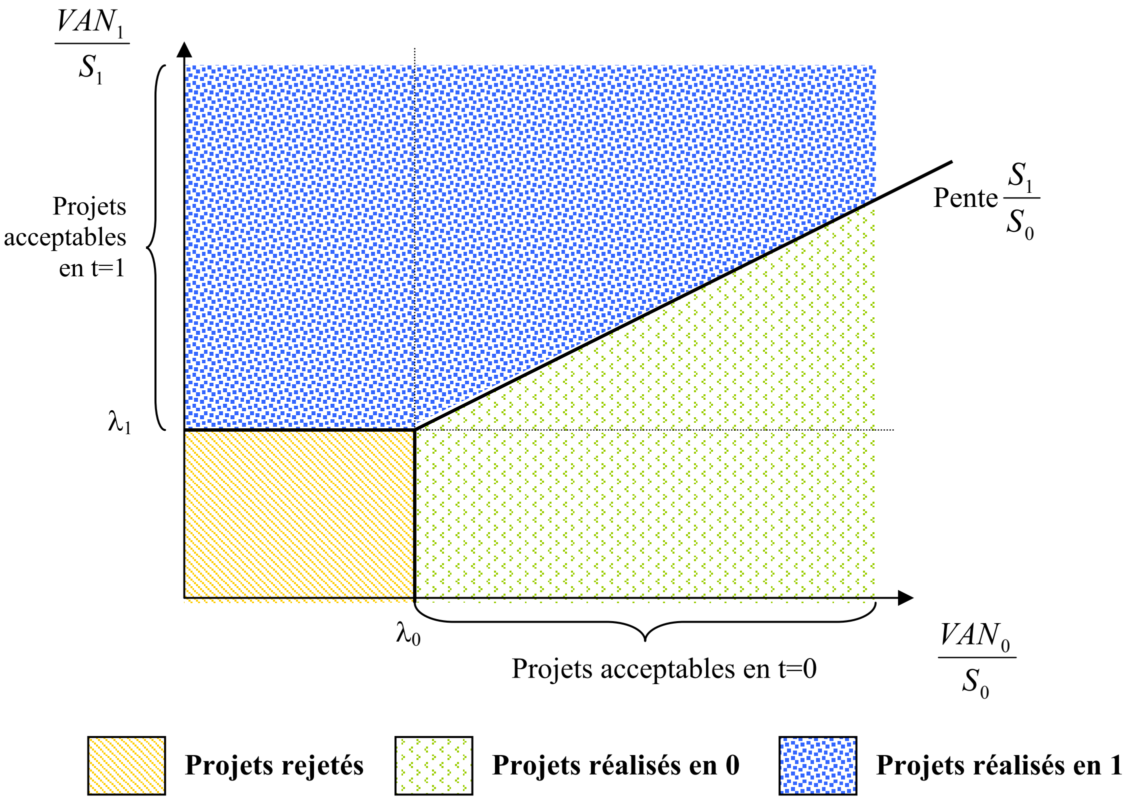
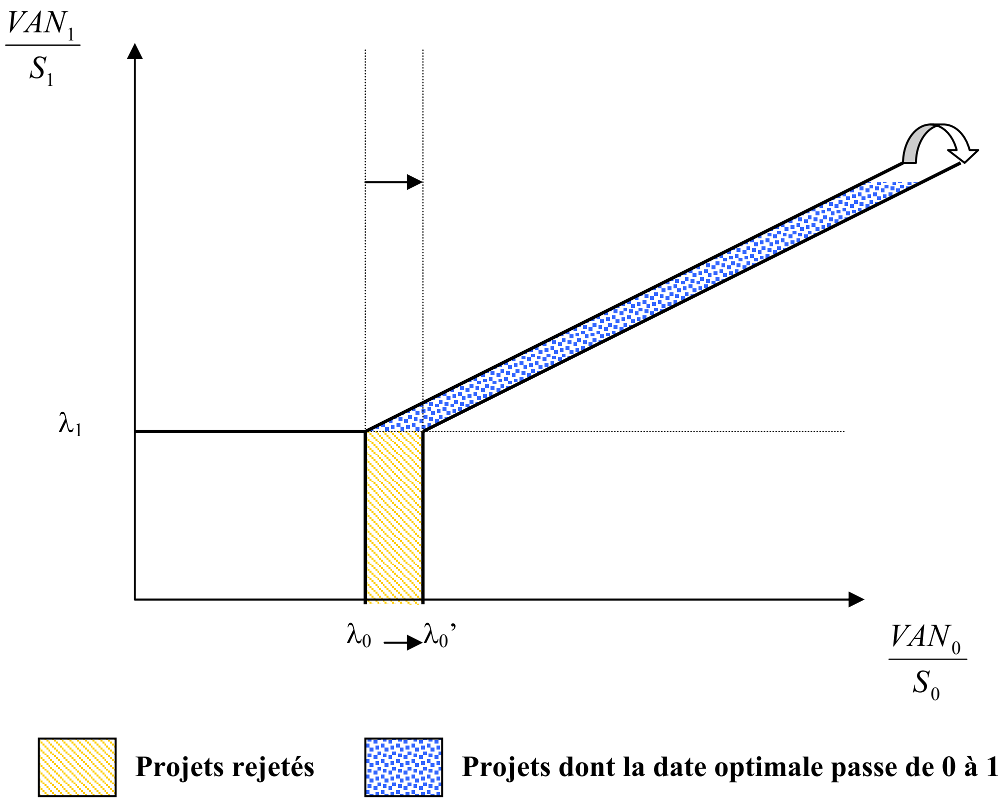


Figure 7 : Effets d'une modification de la contrainte budgétaire en t = 0 sur l'ordre optimal de réalisation



En conclusion de cette généralisation, nous confirmons tout d'abord l'intérêt que peut avoir le critère de la VAN par euro public investi à court et moyen termes, notamment pour hiérarchiser les projets d'une planification quinquennale. En revanche, s'il s'agit de choisir les projets qui seront respectivement réalisés en 2015, 2020 ou 2030, nous avons mis en évidence certaines limites de l'outil. En particulier, la répartition des projets à ces trois échéances nécessite une connaissance des évolutions de la contrainte budgétaire. C'est uniquement une fois connue cette contrainte budgétaire exprimée en termes de coût d'opportunité que les projets pourront être répartis. L'autre résultat du modèle généralisé concerne cette répartition sur la base des différentes valeurs des $VAN_{it}-\lambda_t S_{it}$, qui doit se faire en deux étapes. Pour chaque projet i, il faut retenir la date qui admet la valeur la plus importante de cette fonction. Si cette valeur est positive, le projet devra être réalisé à cette date, sinon il est préférable de l'abandonner.

3.2. Date optimale de réalisation et dynamique des projets : spécification d'une forme fonctionnelle

Le modèle précédent réécrit le modèle de base en relâchant l'hypothèse d'une valorisation indépendante du temps. Pour aller plus loin dans la compréhension des mécanismes en jeu, nous proposons de décrire par une forme fonctionnelle la valeur des projets. Cette spécification sera élaborée progressivement. La seconde spécification généralise la première, elle est cependant moins lisible car plus complexe. La première spécification revient sur l'optimisation dynamique d'un seul projet, sans contrainte budgétaire. Nous mettons en évidence l'existence d'une date optimale de réalisation et nous montrerons formellement que la date optimale de réalisation n'est pas forcément atteinte quand la VAN d'un projet est positive. Le second modèle reprend les mêmes éléments de base mais introduit une contrainte budgétaire. Nous observerons les conséquences sur le date optimale de réalisation qu'induit ici la rareté des financements.

3.2.1 Date optimale de réalisation d'un projet sans contrainte budgétaire

Dans ce modèle, nous écrirons la VAN socio-économique du projet à la date 0 :

$$VAN(t) = \int_{t-d}^{t} -Ce^{-\alpha\tau} d\tau + \int_{t}^{+\infty} (a + b\tau)e^{-\alpha\tau} d\tau \qquad (11)$$

Avec :

α : taux d'actualisation

$e^{-\alpha t}$: est le facteur d'actualisation « continu » à la date t

C : montant de l'investissement

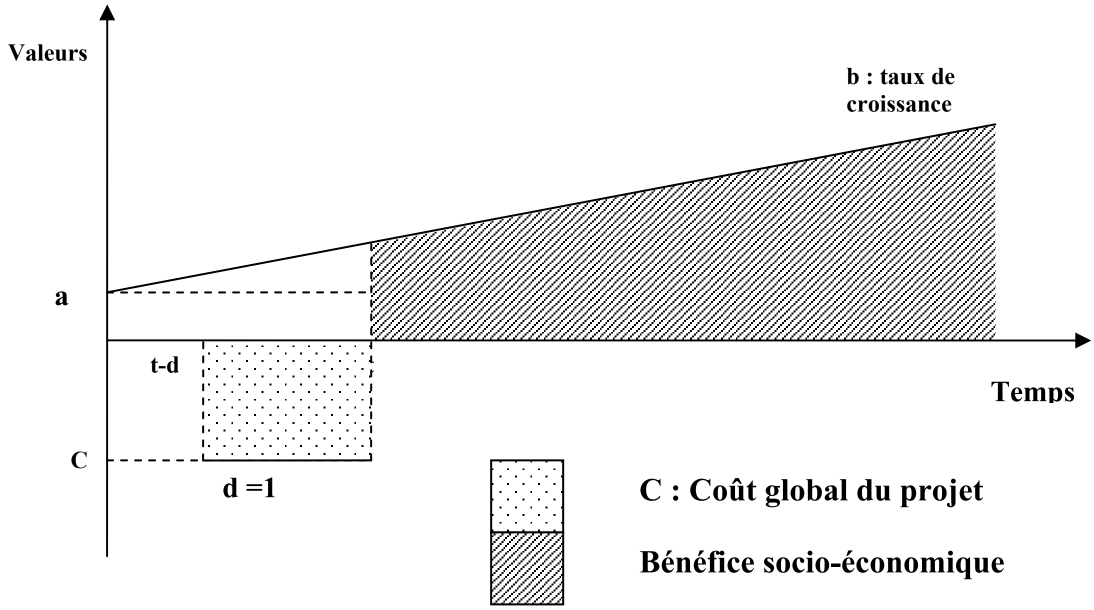
d : durée de l'investissement que nous supposerons égale à 1

a : bénéfice socio-économique net à la date 0

b : taux de croissance du bénéfice socio-économique, supposé linéaire et constant

La formulation stylisée que nous utilisons ici est inspirée des travaux d'Alain Bonnafous (2002). Elle est un peu plus générale au sens où nous faisons varier la date de mise en service, qui n'est pas 0 mais *t*. La principale conséquence de ce choix réside dans le sens que l'on peut donner au paramètre *a*. La dynamique est la suivante : le bénéfice socio-économique à la mise en service progresse à chaque période de *b*. Le bénéfice à la mise en service est donc *a+bt*. En contrepartie de cette généralisation, nous supposerons d=1 pour éclaircir les résultats dont le sens n'est pas fondamentalement changé par cette hypothèse.

Figure 8 : Représentation stylisée des coûts et avantages d'un projet



D'après (11) : $$\mathrm{VAN}(t) = \left[\frac{c}{\alpha}e^{-\alpha\tau}\right]_{t-1}^{t} + \left[-\frac{a}{\alpha}e^{-\alpha\tau}\right]_{t}^{+\infty} + \left[-\frac{b\tau}{\alpha}e^{-\alpha\tau}\right]_{t}^{+\infty} + \left[-\frac{b}{\alpha^2}e^{-\alpha\tau}\right]_{t}^{+\infty}$$

$$\boxed{\Rightarrow VAN(t) = \frac{1}{\alpha}\left[a + bt + \frac{b}{\alpha} - C(e^{\alpha} - 1)\right]e^{-\alpha t}} \qquad (12)$$

Remarquons bien que la VAN est ici socio-économique, que les paramètres a, b et C représentent des valeurs socio-économiques et non exclusivement financières (cas étudié dans Bonnafous 2002).

Notons aussi qu'il est tout à fait possible de comparer des VAN à des périodes différentes à partir de cette formule puisque les valeurs sont actualisées, c'est tout le sens du facteur $e^{-\alpha t}$ à la fin de l'expression (12). Comme précédemment, lorsque nous parlerons de VAN dans ce qui suit, il s'agira d'une VAN actualisée. Bien que les VAN correspondent à une date t, elles sont directement comparables grâce à cette actualisation.

Pour obtenir la date optimale de réalisation du projet, le programme à résoudre est celui de la maximisation de la VAN en fonction de la date de mise en service du projet :

$$\underset{t}{\mathrm{Max}} \quad VAN(t) = \frac{1}{\alpha}\left[a + bt + \frac{b}{\alpha} - C(e^{\alpha} - 1)\right]e^{-\alpha t}$$

La date optimale de réalisation du projet est donnée par la condition nécessaire de 1er ordre :

$$\frac{\partial VAN(t)}{\partial t} = -\left[a + bt - C(e^{\alpha} - 1)\right]e^{-\alpha t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a + bt^* = C(e^{\alpha} - 1)$$

Puisque $e^X - 1 = X$ au voisinage de 0[24], on a :

$$\boxed{\frac{a+bt^*}{C} \cong \alpha} \quad (13)$$

Lorsque (a+bt/C) rejoint α, il est temps de réaliser le projet. Un projet doit donc être réalisé dès lors que sa rentabilité immédiate[25] (a+bt/C) dépasse le taux d'actualisation (α). C'est un résultat classique[26], que ce modèle permet de rappeler assez facilement. A noter que le projet ne doit être réalisé immédiatement ($t^*=0$) que si *(a/C)* atteint α.

Ce qui est le plus remarquable dans le résultat précédent, c'est que ce n'est pas au moment où la VAN devient positive qu'il est le plus intéressant de réaliser un projet. Il ne suffit pas que la VAN soit positive pour que le projet ait à être réalisé au plus vite. Ce constat est relativement contre-intuitif dans la mesure où le fait d'avoir une valeur sociale positive est une condition suffisante pour améliorer le sort de la collectivité. L'idée est finalement assez simple, il faut attendre le moment où on améliore le plus le sort (actualisé) de la société.

D'après (12) on a : $\quad VAN > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + bt + \frac{b}{\alpha} > C.\alpha \quad (14)$

Lorsque b est strictement positif[27], plaçons nous avant la date optimale. Lorsque t est encore trop faible pour que (13) soit satisfaite, on a : $a + b.t < C.\alpha \quad (15)$

La situation décrite par (15) n'est pas incompatible avec une VAN positive (14), ce qui signifie que la date optimale se situe dans la zone où la VAN est positive. La VAN d'un projet peut devenir positive sans que pour autant on ait atteint la date optimale de réalisation.

Si t^* est mathématiquement négatif (b positif), c'est que la date optimale a été dépassée. Il faut bien sûr réaliser l'investissement dès que possible. Remarquons qu'avec b positif, lorsque la date optimale est passée la VAN est toujours positive[28]. Par contre, lorsque la date optimale n'est pas encore dépassée, la VAN peut être négative.

Dans le cas où b est négatif ou nul, il s'agit formellement d'une solution en coin, en t = 0. Si la VAN décroît avec le temps, la mise en service la plus avantageuse est celle qui est la plus immédiate, c'est trivial. Il faut cependant s'assurer que la VAN est encore positive. Contrairement au cas précédent, rien ne nous permet de savoir que la VAN est encore positive en t =0. Bien entendu, un *b* négatif suppose un *(a/C)* particulièrement élevé pour que le projet soit viable en t =0.

---

[24] Dans le cas d'un taux d'actualisation de 8%, l'écart est faible : EXP (0,08) = 1,0833. Pour 4% : EXP (0,04) = 1,0408.

[25] La rentabilité immédiate est un indicateur très utilisé dans les transports, notamment parce qu'il est simple à calculer. Il s'agit du rapport entre le bénéfice à la mise en service et le coût du projet. Le résultat que nous proposons est l'une des justifications de son utilité.

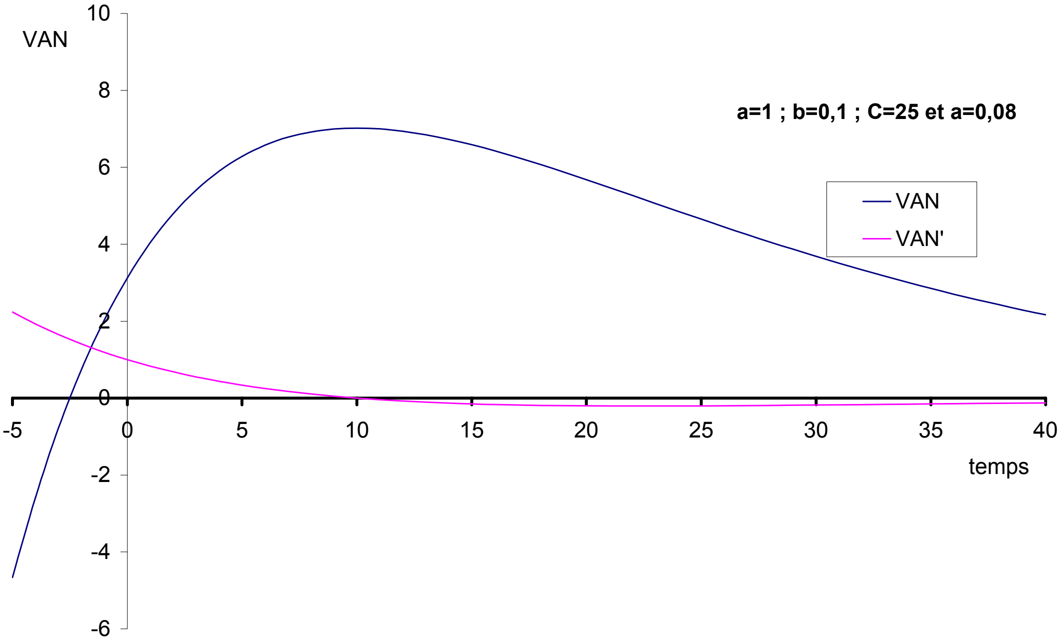
[26] La Direction des Routes utilise un modèle d'évaluation des projets autoroutiers dont l'output principal est le taux de rentabilité immédiate socio-économique. Cet indicateur est explicitement utilisé pour déterminer la date optimale de mise en service.

[27] Condition suffisante du second ordre pour que t* soit l'argument d'un maximum de la VAN.

[28] $t^* < 0 \quad \Rightarrow \quad a > \alpha C \quad \Rightarrow \quad VAN > 0$ pour tout α, t et b positifs.

L'idée qui peut être extraite de cette mise en perspective simple est, qu'indépendamment de la contrainte budgétaire, une première sélection peut être opérée parmi les projets à VAN positive : tous ceux qui ont une valeur actualisée croissante doivent être mis en attente jusqu'à leur valeur maximum.

Figure 9 : Exemple de date optimale de réalisation



3.2.2 *Date optimale, dynamique des projets et contrainte budgétaire*

Deux hypothèses simplifient beaucoup le modèle précédent. Elles résident dans la constance des deux autres valeurs importantes : le coût et le besoin de subvention. L'évolution des coûts d'investissement pourrait être positive (obligations de sécurité qui s'accélèrent…) ou négative (progrès technique), nous la supposerons linéaire. De même, nous modulerons le besoin de subvention de façon linéaire, sans faire d'hypothèse particulière sur le sens de l'évolution.

Le modèle suivant, un peu plus réaliste, apporte toutefois peu d'élément nouveaux. L'attrait principal de ce modèle est de pouvoir exprimer la date optimale de réalisation en fonction de la contrainte budgétaire, et d'observer l'impact de sa variation sur cette date optimale.

Soit $V(t) = VAN(t) - \lambda S(t)$ (16)

avec :

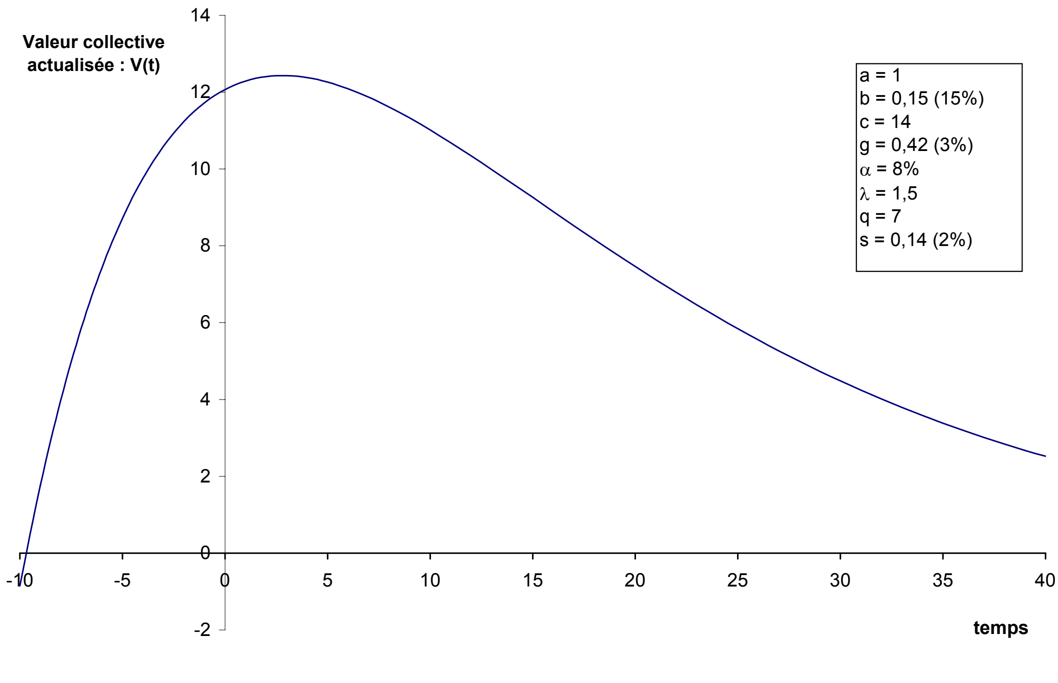
- $VAN(t) = \int_{t-1}^{t} -(c + g\tau)e^{-\alpha\tau} d\tau + \int_{t}^{+\infty} (a + b\tau)e^{-\alpha\tau} d\tau$
- $S(t) = \int_{t-1}^{t} (q + s\tau)e^{-\alpha\tau} d\tau$
- λ : le coût d'opportunité des ressources collectives

d’où $V(t)=\left[a+\frac{b}{\alpha}-\left(\left(c-g\right)+\lambda\left(q-s\right)\right)\alpha+\left(b-g\alpha-\lambda\alpha s\right)t\right]\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}$ (17)

La figure 10 représente un exemple de fonction V(t) avec une date optimale t* = 3. Les propriété mathématiques de l’équation 17 sont les suivantes :

- $V'(t)=\frac{\partial V(t)}{\partial t}=-\left[a-c\alpha+ge^{\alpha}-\lambda q\alpha+\lambda se^{\alpha}+\left(b-g\alpha-\lambda\alpha s\right)t\right]e^{-\alpha t}$
- $V''(t)=\frac{\partial^2 V(t)}{\partial t^2}=-\alpha V'(t)-\left(b-g\alpha-\lambda\alpha s\right)e^{-\alpha t}$
- $\lim\limits_{t\to+\infty} V\left(t\right)=0$
- $V'(t^*)=0\Leftrightarrow t^*=\frac{\alpha\left(c+\lambda q\right)-\left(g-\lambda s\right)e^{\alpha}-a}{b-g\alpha-\lambda\alpha s}$ (18)
- $V(\hat{t})=0\Leftrightarrow \hat{t}=\frac{\alpha\left(c-g+\lambda\left(q-s\right)\right)-a-\frac{b}{\alpha}}{b-g\alpha-\lambda\alpha s}$
- On a toujours : $\hat{t}<t^*$

Figure 10 : Date optimale de réalisation avec évolution des bénéfices, des coûts et du besoin de subvention



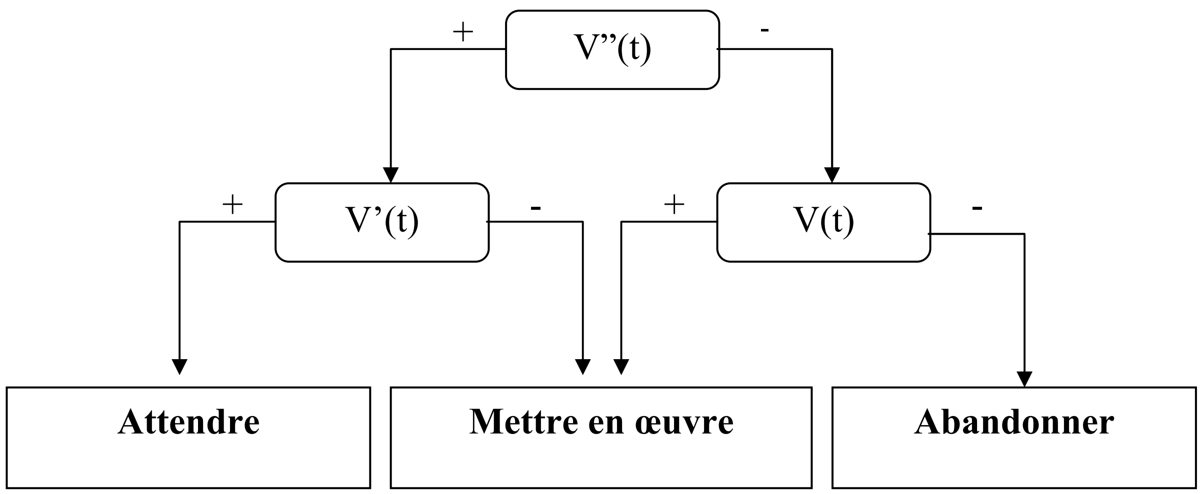
Dans le cas où $b - g\alpha - \lambda\alpha s > 0$, V(t*) est le maximum de la fonction puisque c'est le cas où V'(t*)=0 et V"(t*)<0. Ce maximum correspond à une valeur positive de V mais ceci tiens à la forme très simple de notre modèle. La date t* est positive (i.e. à venir) si : $\alpha(c + \lambda q) - (g - \lambda s)e^{\alpha} > a$. Si t* est négative, cas où $\alpha(c + \lambda q) - (g - \lambda s)e^{\alpha} < a$, le mieux est de réaliser le projet le plus rapidement possible car la fonction V(t) est strictement décroissante une fois le maximum dépassé.

Dans le cas, où $b - g\alpha - \lambda\alpha s < 0$, V(t*) est le minimum de la fonction. La discussion concernant ce minimum est secondaire pour notre problème. Ce qui importe est la valeur positive de V(t). Cette valeur n'est positive que lorsque $t < \hat{t}$. Si $\hat{t} < 0$, il est trop tard. Nous nous situons alors dans la zone décroissante, avant le minimum. Dans la zone croissante nous n'avons aucune chance d'avoir une VAN positive, mais comme précédemment, ceci tiens à la forme très simple de notre modèle.

Au total, l'idée est de mettre en attente les projets avec une dérivée positive. Le résultat de base de ce second modèle concernant les projets avec une marge de progression est le même que dans le précédent : il faut attendre. Dans le cas d'une évolution décroissante au cours du temps, la réalisation ou la mise à l'écart dépend du signe de V(t). La première étape concerne la concavité ou la convexité de la fonction.

De manière plus intuitive et plus pratique, si V'(t) est positive (valeur incluant le coût d'opportunité croissante), il faut attendre. Si V'(t) est négatif, il faut abandonner le projet définitivement lorsque V(t) est négatif et le mettre en œuvre immédiatement si V(t) est positif. L'enchaînement de ces conditions est représenté dans l'arbre de décision de la figure 11. Bien sûr tout ceci n'est possible que parce que les fonctions ont des optima uniques. Dans le cas d'équilibres multiples, ces résultats ne sont vrais que localement.

Figure 11 : arbre de décision

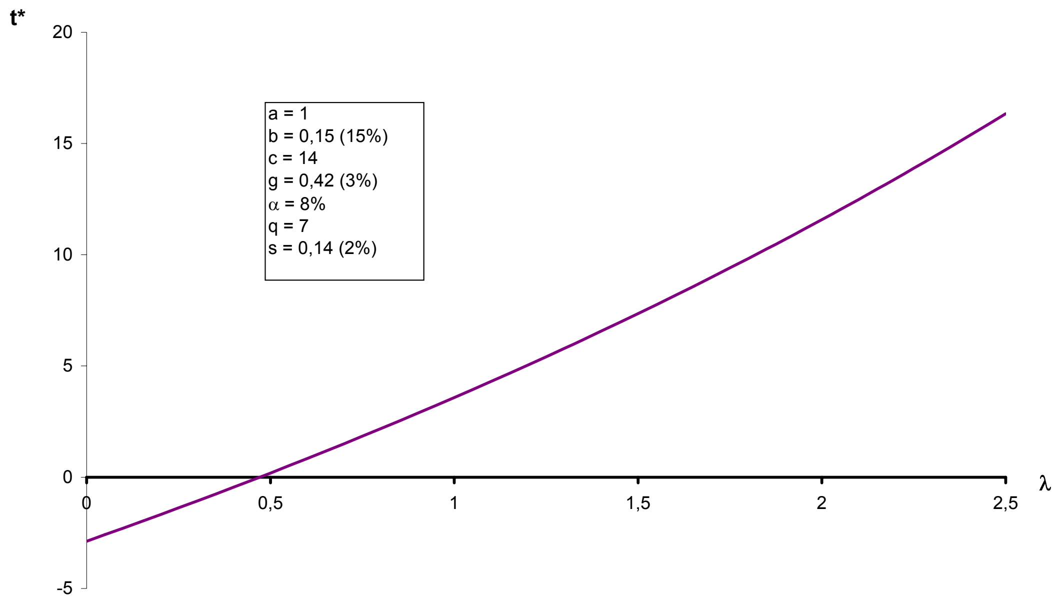


Par ailleurs, d'après l'équation (18), il est possible de décrire le comportement de la date optimale de réalisation lorsque la contrainte budgétaire varie :

$$\frac{\partial t^*}{\partial \lambda} = \frac{s(b - 2g\alpha)e^{\alpha} + \alpha(q(b - \alpha g) + s(\alpha c - a))}{(b - g\alpha - \lambda\alpha s)^2}$$

La forme de cette dérivée est un peu complexe, mais si on compare les ordres de grandeur crédibles, la courbe a de très fortes chances d'être strictement croissante, à moins que α (taux d'actualisation), a (bénéfices socio-économiques à la date 0) ou g (taux de croissance des coûts) soient de taille très importante. L'augmentation de λ conduit à différer les projets sauf si l'accroissement de coût est très conséquent (g), si la préférence pour le présent est très forte (α) ou si le gain socio-économique fixe (a) est remarquablement élevé. En somme, la plupart des projets ont une date optimale qui s'accroît lorsque λ augmente comme dans la figure 12, sauf ceux pour lesquels il est extrêmement coûteux d'attendre.

Figure 12 : Date optimale de réalisation et contrainte budgétaire



En conclusion de cette seconde étude complémentaire visant à analyser les conséquences du relâchement de l'hypothèse de stabilité des VAN, des besoins de subvention et des contraintes budgétaires, rappelons les quelques résultats que nous avons obtenus.

Tout d'abord, nous avons pu mettre en évidence que le critère de la VAN par euro public investi perd de sa robustesse dès lors que deux des trois paramètres (VAN, S et λ) ne sont pas stables dans le temps. Il est donc difficile de recommander ce critère pour des perspective à très long terme. Cependant, l'incertitude et les difficultés de mesure à cette échéance le rendent de toute façon difficile à mettre en œuvre dans cette perspective.

Le point précis qui pose question est que la plus ou moins grande pression budgétaire modifie la date optimale de réalisation de certains projets, sans que ces derniers ne soient faciles à distinguer des autres. Tout au plus, nous avons pu constater que la plus forte pression budgétaire conduit à différer ou abandonner des projets à faible VAN/S tout au long de leur existence, ce qui est cohérent avec le critère.

Nous avons aussi mis en évidence le fait que le processus de décision se joue théoriquement en deux étapes. Chaque projet possède une date où la réalisation procure la satisfaction maximale. Et c'est seulement à cette date qu'il peut être comparé aux autres (et classé) sur la base du critère de la VAN par euro public

4. Conclusion

Comme nous l'avons montré, le critère de la valeur socio-économique par euro public investi possède une pertinence certaine. En particulier, ce critère est très utile lorsque les hypothèses utilisées pour modéliser et les limites observées ne sont pas prédominantes. Il est important de ne pas abuser de son utilisation lorsque sont en jeu des projets dont la valeur sociale n'est pas bien capturée par l'ACA, dans le cas de projets fortement substituables ou complémentaires, ou dans le choix d'un calendrier à très long terme. En d'autres termes, il faut se garder d'une utilisation « technocratique » de ce critère. Les choix politiques nécessitent un certain discernement, tout comme l'utilisation d'un tel indicateur, malgré sa puissance et ses solides fondements théoriques. Reste qu'au sein du tableau de bord résumant les qualités d'un projet d'infrastructure, il a tout à fait sa place.

Remarquons aussi que la portée de ce résultat est plus générale que celle du cas d'application que nous avons choisi, concernant les infrastructures de transport. Dès lors qu'un décideur dispose de projets concurrents caractérisés par les utilités potentiellement générées (privée ou sociale, globale ou locale selon son point de vue) et les coûts d'investissement, il a intérêt à les hiérarchiser selon ce critère. Si un projet peut être qualifié par une valeur créée (surplus, utilité ou profit) et que les ressources de financement sont rares, il peut être classé selon le ratio « satisfaction par euro dépensé » par rapport aux autres. Par exemple, si une entreprise privée est confrontée à une imperfection des marchés financiers[29] et qu'elle dispose de trop nombreux projets rentables, l'ordre optimal de réalisation suit le ratio « bénéfice net par euro investi ». Le modèle de base permettant de le démontrer est mathématiquement identique à celui que nous avons présenté.

Par ailleurs, il est aussi possible d'imaginer le cas d'une collectivité locale ayant une valorisation particulièrement forte pour une infrastructure financée en partenariat. La question qu'elle se pose dans ce cas de figure concerne le montant qu'elle est prête à payer en fonds propres pour favoriser la réalisation de l'infrastructure. Par exemple, il existe un certain nombre de projets pour lesquels s'engagent l'Union Européenne, l'État, plusieurs collectivités locales, et une entreprise concessionnaire. La question couramment débattue est celle des parts de chacun[30], sachant que l'intérêt d'aucun n'est suffisant ou prédominant. Le critère de la VAN par euro investi peut être un outil favorisant la répartition optimale du financement par les collectivités (Europe, État, Région…). Tout au moins, le critère offre une piste de réflexion intéressante concernant la répartition des financements des biens collectifs entre pouvoirs publics. La première idée est que chacun peut évaluer son bénéfice net du projet, en exprimant par exemple son utilité grâce une Analyse Coûts-Avantages[31]. Ensuite, pour que chacun sache quelle est localement sa disposition à payer, il suffit qu'il divise son utilité par son propre coût d'opportunité λ. Chaque collectivité obtient alors le maximum qu'elle est prête à subventionner. Si la somme des dispositions à payer est supérieure au coût, alors le projet doit être réalisé.

[29] C'est parfois explicitement le cas pour les responsables d'établissement de certains groupes, dont le siège social limite le recours aux différents modes de financement, internes et externes.

[30] Le cas le plus simple est la recherche du meilleur niveau institutionnel pour réaliser un investissement.

[31] Les différences entre les utilités des partenaires émergeront principalement sur la base des multiples externalités locales que génèrent les infrastructures de transport.

Enfin, ce critère peut tout à fait être utile en termes de management. Par exemple, il peut guider la modification marginale d'un projet ou la comparaison de deux scénarios (vers l'option avec la plus forte valeur par euro public investi). A la manière de l'EVA[32], ce critère est applicable aussi bien en analyse externe (comme nous l'avons fait jusqu'ici) qu'en tant que « mot d'ordre » managérial qui oriente toutes les décisions des acteurs internes dans toute la hiérarchie.

[32] L'Economic Value Added est un outil, mais surtout une doctrine managériale, qui permet décliner l'objectif de la création de valeur pour l'actionnaire de l'investisseur boursier jusqu'aux responsables locaux.

Bibliographie

BABUSIAUX D. (1990), *Décision d'investissement et calcul économique dans l'entreprise*, Economica / Technip, coll. Economie et statistiques avancées.

BAUMOL W., QUANDT R. (1965), « Investment and Discount Rates Under capital Rationing, A Programming Approach », *The Economic Journal*, 75(298), pp.317-329.

BAUMSTARK L. (2001) « Analyse économique et développement durable dans le secteur des transports: le rapport Boiteux II », *Les Annales des Mines*, n°24.

BERTONECHE M., LANGOHR H. (1977), « Le choix des investissements en situation de rationnement de capital. Comparaison des solutions fournies par différents modèles théoriques», *Revue Economique*, 28(5).

BLOY E., BONNAFOUS A, CUSSET J-M, GERARDIN B. (1976), *Evaluer la politique des transports*, Economica / Presse Universitaires de Lyon, coll. « Economie publique de l'aménagement et des transports ».

BONNAFOUS A. (2002), « Les infrastructures de transport et la logique financière du partenariat public-privé : quelques paradoxes », *Revue Française d'Economie*, 17(1).

BONNAFOUS A. et JENSEN P. (2005) « Ranking Transport Projects by their Socio-economic Value or Financial Interest Rate of Return ? », *Transport Policy*, à paraître.

BONNAFOUS A., CROZET Y. (1997), « Evaluation, dévaluation ou réévaluation des lignes à grande vitesse ? », *Les Cahiers Scientifiques du Transport*, n°32.

CERTU (2002), *Recommandations pour l'évaluation socio-économique des projets de TCSP*, référence n°25, DTT, 143 p.

COMMISSARIAT GENERAL DU PLAN (1993), *Transports : pour une cohérence stratégique*, Atelier sur les orientations stratégiques de la politique des transports et leurs implications à moyen terme, présidé par Alain Bonnafous.

COMMISSARIAT GENERAL DU PLAN (2001), *Transports : choix des investissements et coût des nuisances*, BOITEUX (prés.), Paris : La Documentation Française.

COMMISSARIAT GENERAL DU PLAN (2005), *Révision du taux d'actualisation des investissement publics*, à paraître : http://www.plan.gouv.fr.

CONSEIL GENERAL DES PONTS ET CHAUSSEES (2001), *Bilan LOTI du TGV atlantique*.

EVERETT H. (1963), « Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources », *Operations Research*, 11(3) pp. 399-417.

GARRIDO E. (1995), *Financer autrement les nouveaux TGV : le maillon européen du TGV Barcelone-Montpellier*, TGV Eurosud : Colomiers, Association Française des Banques.

GERARD-VARET L-A, RYCHEN F. (1999), « Calcul économique et financement des infrastructures », *Revue d'Economie Financière*, n°51.

LAFFONT J-J, TIROLE J. (1993), *A Theory of Incentives in Procurement and Regulation*, Cambridge MA : MIT Press.

LANGLOIS G. et MOLLET M. (1999), *Gestion financière*, Fouchet, DECF, 2e édition.

LESOURNE J. (1972), *Le calcul économique : théorie et application,* Dunod, 459 p.

LORIE J.H., SAVAGE L.J. (1955), « Three problems in rationing capital », *Journal of Business*, 28(4), pp.229-239.

MAURICE J. (2004), « Traitement des fonds publics », *Note de réflexion*, groupe de travail du CGPC sur le taux d'actualisation.

MILLER M. et MODIGLIANI F. (1961), « Dividend Policy, Growth And The Valuation Of Shares », *Journal of Business,* 34, pp.411-433

MYERS S. (1972), « A Note on Linear Programming and Capital Budgeting », *Journal of Finance*, 27(1), pp. 89-92.

NICOLAS J-P (1998), « Le coût des nuisances des transports : méthode d'évaluation et usage des résultats obtenus », *Document de travail du LET*, n°98/02.

RAUX C, SOUCHE S. (2004), « The acceptability of urban road pricing: A theoretical analysis applied to experience in Lyon », *Journal of Transport Economics and Policy*, 38(2).

SIMON C, BLUM L. (1998), *Mathématiques pour économistes*, De Boeck.

TRANSPORT POLICY (2000), *Special issue : international comparison of evaluation process of transport projects*, 7(1), January, 88 p.

WEINGARTNER M. (1963), *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall (reissued, London: Kershaw, 1974).